

Übungen zur Theoretischen Physik III für Lehramtskandidaten
(Quantenmechanik+Statistische Physik)
SS 2010, Blatt 4

5+8. Aufgabe: Harmonischer Oszillator (2+2+2 Punkte)

a) Um die angegebenen Gleichungen herzuleiten werden wir folgende Gleichungen verwenden.

$$b^\dagger b - b b^\dagger = -1 \quad (1)$$

$$b^\dagger b |n\rangle = \epsilon_n |n\rangle \quad (2)$$

$$b|0\rangle = 0 \quad (3)$$

Gl. (2) ist der mathematische Ausdruck, dass die Zustände $|n\rangle$ Eigenzustände des harmonischen Oszillators sind wobei die Eigenwerte mit ϵ_n bezeichnet werden und laut Vorlesung durch $\epsilon_n = (E_n - 1/2)/\hbar\omega$ mit den Energieeigenwerten verbunden sind. Gl. (3) sagt, dass b auf den Grundzustand $|0\rangle$ angewendet 0 ergibt. Dies zeigt auch, dass der zugehörige Eigenwert $\epsilon_0 = 0$ ist. Dies wurde in der Vorlesung gezeigt.

Nun wenden wir b^\dagger auf Gl. (2) von links an

$$b^\dagger b^\dagger b |n\rangle = \epsilon_n b^\dagger |n\rangle \quad (4)$$

$$b^\dagger (b b^\dagger - 1) |n\rangle = \epsilon_n b^\dagger |n\rangle \quad (5)$$

$$b^\dagger b (b^\dagger |n\rangle) = (\epsilon_n + 1) (b^\dagger |n\rangle). \quad (6)$$

wobei wir in der zweiten Linie Gl. (1) verwendet haben. Ein Vergleich mit Gleichung. (2) zeigt, dass $b^\dagger |n\rangle$ auch ein Eigenzustand des harmonischen Oszillators ist, mit Eigenwert $\epsilon_n + 1$. Durch wiederholtes Anwenden des Operators b^\dagger finden wir immer wieder Eigenzustände des harmonischen Oszillators und erhöhen den zugehörigen Eigenwert um 1. Wir finden also

$$|1\rangle = \alpha_0 b^\dagger |0\rangle \quad (7)$$

$$|2\rangle = \alpha_1 b^\dagger |1\rangle \quad (8)$$

$$|n+1\rangle = \alpha_n b^\dagger |n\rangle \quad (9)$$

wobei die zugehörigen Eigenwerte $\epsilon_1 = \epsilon_0 + 1 = 1$, $\epsilon_2 = \epsilon_1 + 1 = 2$ und $\epsilon_{n+1} = n + 1$ lauten. Die konstanten α_j ($j = 0, 1, n$) werden durch die Normierung bestimmt.

$$1 = \langle n+1 | n+1 \rangle = |\alpha_n|^2 \langle n | b b^\dagger | n \rangle \quad (10)$$

$$= |\alpha_n|^2 \langle n | (b^\dagger b + 1) | n \rangle \quad (11)$$

$$= |\alpha_n|^2 (n + 1) \quad (12)$$

wobei wieder Gl. (1) mit der Normierungsbedingung $\langle n | n \rangle$ verwendet wurde und es folgt $\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Damit ergibt Gl. (9)

$$b^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad (13)$$

Damit finden wir

$$b|n\rangle = b \frac{1}{\sqrt{n}} b^\dagger |n-1\rangle \quad (14)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} (b^\dagger b + 1) |n-1\rangle \quad (15)$$

$$= \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (16)$$

Und ein Vergleich der rechten Seite der ersten Zeile mit der letzten Zeile liefert sofort

$$bb^\dagger |n\rangle = (n+1) |n\rangle \quad (17)$$

wobei wir $n-1$ mit n ersetzt haben. Die letzte Gleichung des Aufgabenblatts ergibt sich durch

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} b^\dagger |n-1\rangle \quad (18)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} b^\dagger b^\dagger |n-2\rangle \quad (19)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n!}} (b^\dagger)^n |0\rangle \quad (20)$$

b)

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass

$$b^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mp \frac{\partial}{\partial x'} + x') \quad (21)$$

wobei $b^+ = b^\dagger$, $b^- = b$ und $x' = x/x_0$ ist die skalierte Ortsvariable mit $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$. Damit finden wir also

$$\begin{aligned} b^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mp x_0 \frac{\partial}{\partial x} + x/x_0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} (m\omega\hat{x} \mp i\hat{p}) \end{aligned} \quad (22)$$

wobei $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ verwendet wurde. Auflösen nach \hat{x} und \hat{p} liefert also

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (b^\dagger + b) \quad (23)$$

$$\hat{p} = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} (b^\dagger - b) \quad (24)$$

Damit finden wir

$$\begin{aligned} \langle n|\hat{x}|n'\rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\langle n|b^\dagger|n'\rangle + \langle n|b|n'\rangle) \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\sqrt{n'+1}\delta_{n,n'+1} + \sqrt{n'}\delta_{n,n'-1}) \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \langle n|\hat{p}|n'\rangle &= i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} (\langle n|b^\dagger|n'\rangle - \langle n|b|n'\rangle) \\ &= i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} (\sqrt{n'+1}\delta_{n,n'+1} - \sqrt{n'}\delta_{n,n'-1}) \end{aligned} \quad (26)$$

c)

Wir haben

$$\hat{x}(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(b^\dagger(t) + b(t)) \quad (27)$$

Nun ist die Zeitentwicklung von b^\pm gegeben durch

$$i\hbar\dot{b}^\pm = [b^\pm, H] \quad (28)$$

Wobei $H = \hbar\omega(b^\dagger b - 1/2)$ der Hamiltonoperator des harmonischen Oszillators ist. Damit ergibt sich mit Gl.(1) für den Kommutator

$$b^\pm = \pm i\omega b^\pm \quad (29)$$

mit der Lösung

$$b^\pm(t) = e^{\pm i\omega t} b^\pm(0) \quad (30)$$

Es ergibt sich also

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(e^{i\omega t} b^+(0) + e^{-i\omega t} b^-(0)) \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(e^{i\omega t} \frac{m\omega \hat{x}(0) - i\hat{p}(0)}{\sqrt{2m\omega\hbar}} + e^{-i\omega t} \frac{m\omega \hat{x}(0) + i\hat{p}(0)}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \right) \\ &= \hat{x}(0) \cos \omega t + \frac{\hat{p}(0)}{m\omega} \sin \omega t \end{aligned} \quad (31)$$

wobei Gl. (22) verwendet wurde.

8c)(2 Punkte)

Es soll die Zeitentwicklung des Erwartungswertes $\langle \psi | x(t) | \psi \rangle$ berechnet werden. Dazu werden wir Gl. (31) benutzen. Wir müssen dann nur noch die folgenden Erwartungswerte bestimmen

$$\begin{aligned} \langle \psi | x(0) | \psi \rangle &= (a^* b \langle 0 | x | 1 \rangle + ab^* \langle 1 | x | 0 \rangle) \\ &= \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \Re ab^* \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \langle \psi | p(0) | \psi \rangle &= (a^* b \langle 0 | p | 1 \rangle + ab^* \langle 1 | p | 0 \rangle) \\ &= -\sqrt{2m\omega\hbar} \Im ab^* \end{aligned} \quad (33)$$

wobei wir Gl. (25) und Gl. (26) (daraus folgt auch, dass $\langle 0 | x | 0 \rangle = \langle 1 | x | 1 \rangle = 0$ und gleiches gilt für p , da die Matrixelemente von x und p nur dann unterschiedlich von 0 sind, wenn sich n und n' (hier 0 und 1) um eins unterscheiden ($|n - n'| = 1$)) verwendet haben. Weiterhin bezeichnet $\Re z$ ($\Im z$) den Realteil (Imaginärteil) von z . Mit Gl. (31) ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \langle \psi | x(t) | \psi \rangle &= \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} (\Re ab^* \cos \omega t - \Im ab^* \sin \omega t) \\ &= \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} |ab| (\cos \alpha \cos \omega t - \sin \alpha \sin \omega t) \\ &= \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} |ab| \cos(\omega t + \alpha) \end{aligned} \quad (34)$$

wobei $ab^* = |ab|e^{2\alpha}$.

9. Aufgabe: (5 Punkte)

a)

Um die Eigenwerte von H zu finden müssen wir folgende Gleichung lösen

$$\det \begin{pmatrix} \epsilon - \lambda & \Delta \\ \Delta & -\epsilon - \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (35)$$

Damit ergibt sich die charakteristische Gleichung

$$-(\epsilon - \lambda)(\epsilon + \lambda) - \Delta^2 = 0 \quad (36)$$

was die Eigenwerte $\lambda_{\pm} = \pm \hbar\omega$ mit $\omega = \frac{1}{\hbar}\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}$ ergibt.

Die zugehörigen Eigenzustände seien nun $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$ und daher

$$H|\alpha\rangle = \hbar\omega|\alpha\rangle \quad (37)$$

$$H|\beta\rangle = -\hbar\omega|\beta\rangle \quad (38)$$

Wir finden nun aus der Schrödingergleichung die Zeitentwicklung

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\alpha\rangle = H|\alpha\rangle \quad (39)$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial t}|\alpha\rangle = -i\omega|\alpha\rangle \quad (40)$$

und damit finden wir

$$|\alpha(t)\rangle = |\alpha(0)\rangle e^{-i\omega t} \quad (41)$$

und in derselben Weise gilt

$$|\beta(t)\rangle = |\beta(0)\rangle e^{i\omega t} \quad (42)$$

Wir können den Hamiltonoperator H schreiben als

$$H = H_0 + V \quad (43)$$

wobei

$$H_0 = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & -\epsilon \end{pmatrix} \quad (44)$$

$$V = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \quad (45)$$

Der Hamiltonoperator H_0 hat offensichtlich die Eigenzustände (ist schon diagonal)

$$|\varphi_+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (46)$$

$$|\varphi_-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (47)$$

mit den zugehörigen Eigenwerten $\lambda_{\pm}^0 = \pm\omega_0$ wobei $\omega_0 = \frac{\epsilon}{\hbar}$. Die Zeitentwicklung durch H_0 ist also gegeben durch (analog wie oben)

$$|\varphi_{\pm}(t)\rangle = |\varphi_{\pm}(0)\rangle e^{\mp i\omega_0 t} \quad (48)$$

Nun müssen wir noch die Zeitentwicklung von $|\varphi_{\pm}(t)\rangle$ durch den gesamten Hamiltonoperator H finden. Dazu entwickeln wir die Eigenzustände $|\varphi_{\pm}\rangle$ in Eigenzuständen von H

$$|\varphi_{\pm}\rangle = a_{\pm}|\alpha\rangle + b_{\pm}|\beta\rangle \quad (49)$$

Da wir nach Gl. (41) und Gl. (42) die Zeitentwicklung von $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$ kennen können wir damit nun auch die Zeitentwicklung von $|\varphi_{\pm}\rangle$ bestimmen. Um die Koeffizienten a_{\pm} und b_{\pm} zu bestimmen benötigen wir allerdings die explizite Darstellung von $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$ in der Basis von H_0 . Wir wählen

$$|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} x_+ \\ y_+ \end{pmatrix} \quad |\beta\rangle = \begin{pmatrix} x_- \\ y_- \end{pmatrix} \quad (50)$$

und finden damit aus den Eigenwertgleichungen $H|\alpha\rangle = \lambda_+|\alpha\rangle$ und $H|\beta\rangle = \lambda_-|\beta\rangle$

$$\epsilon x_{\pm} + \Delta y_{\pm} = \lambda_{\pm} x_{\pm} \quad (51)$$

$$\Delta x_{\pm} - \epsilon y_{\pm} = \lambda_{\pm} y_{\pm} \quad (52)$$

wir wählen $x_{\pm} = 1$ und finden damit $y_{\pm} = \frac{1}{\Delta}(\lambda_{\pm} - \epsilon) = \frac{-\epsilon \pm (\epsilon^2 + \Delta^2)^{1/2}}{\Delta}$. Damit ergibt sich also für die Eigenzustände

$$|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-\epsilon + (\epsilon^2 + \Delta^2)^{1/2}}{\Delta} \end{pmatrix} \quad |\beta\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-\epsilon - (\epsilon^2 + \Delta^2)^{1/2}}{\Delta} \end{pmatrix} \quad (53)$$

Nun gilt

$$|\alpha\rangle - |\beta\rangle = \frac{2(\epsilon^2 + \Delta^2)^{1/2}}{\Delta} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2\hbar\omega}{\Delta} |\varphi_{-}\rangle \quad (54)$$

Damit finden wir also für die Zeitentwicklung von $|\varphi_{-}\rangle(t)$

$$\begin{aligned} |\varphi_{-}(t)\rangle &= \frac{\Delta}{2\hbar\omega} (|\alpha(t)\rangle - |\beta(t)\rangle) \\ &= \frac{\Delta}{2\hbar\omega} (|\alpha(0)\rangle e^{-i\omega t} - |\beta(0)\rangle e^{i\omega t}) \end{aligned} \quad (55)$$

Aus Gl. (53) können wir nun $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$ durch $|\varphi_{\pm}\rangle$ ausdrücken und finden

$$\begin{aligned} |\varphi_{-}(t)\rangle &= \frac{\Delta}{2\hbar\omega} \left[\left(|\varphi_{+}\rangle + \frac{-\epsilon + \hbar\omega}{\Delta} |\varphi_{-}\rangle \right) e^{-i\omega t} - \left(|\varphi_{+}\rangle + \frac{-\epsilon - \hbar\omega}{\Delta} |\varphi_{-}\rangle \right) e^{i\omega t} \right] \\ &= \frac{\Delta}{2\hbar\omega} \left[|\varphi_{+}\rangle (e^{-i\omega t} - e^{i\omega t}) + \frac{\hbar}{\Delta} |\varphi_{-}\rangle ((\omega - \omega_0)e^{-i\omega t} + (\omega_0 + \omega)e^{i\omega t}) \right] \\ &= \frac{-i\Delta}{\hbar\omega} \sin \omega t |\varphi_{+}\rangle + \left(\cos \omega t + \frac{i\omega_0}{\omega} \sin \omega t \right) |\varphi_{-}\rangle \end{aligned} \quad (56)$$

Wir sehen also, dass durch den Beitrag von V die beiden Eigenzustände $|\varphi_{\pm}\rangle$ mit der Zeit gemischt werden. Dies kann man leicht verstehen, wenn man die Wirkung von V auf $|\varphi_{\pm}\rangle$ anschaut

$$V|\varphi_{\pm}\rangle = \Delta|\varphi_{\mp}\rangle \quad (57)$$

d.h. V angewendet auf einen der beiden Eigenzustände von H_0 ergibt den anderen gewichtet mit der Stärke Δ von V . Wenn sich das System zum Zeitpunkt $t = 0$ in $|\varphi_{-}\rangle$

befindet, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich zum Zeitpunkt t im Zustand $|\varphi_{-}\rangle$ befindet gegeben durch

$$\begin{aligned}
 P_{-}(t) &= |\langle\varphi_{-}(0)|\varphi_{-}(t)\rangle|^2 \\
 &= \left| \cos \omega t + \frac{i\omega_0}{\omega} \sin \omega t \right|^2 \\
 &= \cos^2 \omega t + \frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 + \Delta^2} \sin^2 \omega t \tag{58}
 \end{aligned}$$

$$= \cos^2 \omega t + \frac{\epsilon^2 + \Delta^2 - \Delta^2}{\epsilon^2 + \Delta^2} \sin^2 \omega t \tag{59}$$

$$= 1 - \frac{\Delta^2}{\epsilon^2 + \Delta^2} \sin^2 \omega t \tag{60}$$

Wenn wir also $V = 0$ ($\Delta = 0$) setzen, so entspricht das der Dynamik nur durch H_0 und wir sehen, dass das System sich zu jedem Zeitpunkt in $|\varphi_{-}\rangle$ befindet wenn es am Anfang in diesem Zustand war. Sobald allerdings $\Delta \neq 0$ finden wir ein Oscillation in der Besetzungswahrscheinlichkeit des Zustandes $|\varphi_{-}\rangle$ wobei das System immer zu den Zeitpunkten $t_n = \frac{\pi n}{\omega}$ (n ganzzahlig) zum Anfangszustand zurückkehrt. Wenn wir nun nur die Dynamik durch V anschauen ($\epsilon = 0$) so sehen wir, dass zu den Zeitpunkten $t'_n = \frac{(2n+1)\pi}{2\omega}$ die Wahrscheinlichkeit das System in $|\varphi_{-}\rangle$ zu finden 0 ist $P_{-}(t'_n) = 0$. In diesem Fall oszilliert das System also zwischen den beiden Zuständen hin und her. Solche Oszillationen nennt man auch Rabi-Oszillationen. In Fig. (1) ist $P_{-}(t)$ als Funktion von t für verschiedene Stärken von V aufgetragen.

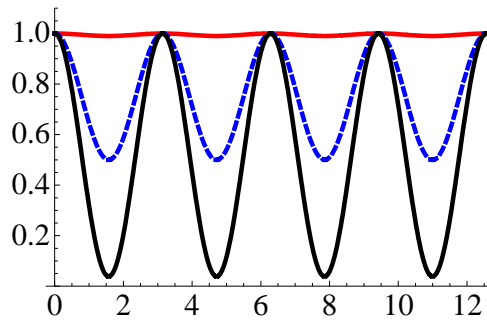


Abbildung 1: Wahrscheinlichkeit $P_{-}(t)$ als Funktion von Zeit in Einheiten von ω . Dabei ist rot: $\frac{\epsilon}{\Delta} = 0.1$, blau gestrichelt: $\frac{\epsilon}{\Delta} = 1$, schwarz: $\frac{\epsilon}{\Delta} = 5$