Universität des Saarlandes
Fachrichtung 7.1 – Theoretische Physik
Prof. Dr. H. G. Schuster

Übungen zur Theoretischen Physik III für Lehramtskandidaten (Quantenmechanik+Statistische Physik)
SS 2010, Blatt 3

5. Aufgabe: Harmonischer Oszillator (2+2+2 Punkte)

6. Aufgabe: Hermitsche Matrix (1+1+1 Punkte)

a)
Um die Eigenwerte von A zu finden müssen wir folgende Gleichung lösen

$$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2\imath \\ -2\imath & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \tag{1}$$

Damit ergibt sich die charakteristische Gleichung

$$\lambda(\lambda-3)-4=0 \tag{2}$$

was die Eigenwerte $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = -1$ ergibt.
b)
Für die zugehörigen Eigenvektoren gilt $A\vec{x}_{1,2} = \lambda_{1,2}\vec{x}_{1,2}$ und damit

$$3x_{1,2} + 2\imath y_{1,2} = \lambda_{1,2} x_{1,2} \tag{3}$$
$$-2\imath x_{1,2} = \lambda_{1,2} y_{1,2} \tag{4}$$

Wir wählen $x_{1,2} = \imath$ und finden von Gl. (4) $y_1 = \frac{1}{2}$ und $y_2 = -2$. Damit erhalten wir für die nicht normalisierten Eigenvektoren

$$\tilde{\vec{x}}_1 = \begin{pmatrix} \imath \\ 1/2 \end{pmatrix} \tag{5}$$
$$\tilde{\vec{x}}_2 = \begin{pmatrix} \imath \\ -2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Und durch Normieren erhält man

$$\vec{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2\imath \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \imath \\ -2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

c)
Damit ergibt sich für die unitäre Tranformation die A diagonalisiert

$$U = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2\imath & \imath \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

mit

$$U^\dagger A U = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2) \tag{9}$$

7. Aufgabe: (1 Punkt)

Wenn sich das Teilchen im quantenmechanischen Grundzustand befindet so hat es die Energie $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$. Um den klasisch erlaubten Bereich zu bestimmen muessen wir die Umkehrpunkte des Teilchens bestimmen, wenn es die Energie E_0 hat. Die klassische Hamiltonfunktion ist gegeben durch $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = E_{kin} + E_{pot}$. An den klasischen Umkehrpunkten gilt $p = 0$ und daher

$$\begin{aligned} E_0 &= E_{kin} && (10) \\ \frac{\hbar\omega}{2} &= \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2 && (11) \end{aligned}$$

Damit finden wir für die klasischen Umkehrpunkte $x_c = \pm\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} = \pm x_0$ D.h. ein klasisches Teilchen wird sich nur im Bereich $[-x_0, x_0]$ aufhalten. Laut Vorlesung gilt für die Wahrscheinlichkeitsdichte eines Teilchens im Grundzustand des harmonischen Oszillators

$$|\psi(x)|^2 = \frac{1}{x_0\sqrt{\pi}} \exp[-\frac{x^2}{x_0^2}] \tag{12}$$

und damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit das Teilchens ausserhalb des Bereichs $[-x_0, x_0]$ zu finden $P(|x| > x_0) = 1 - P_c$ wobei P_c die Wahrscheinlichkeit ist, das Teilchen in $[-x_0, x_0]$ zu finden und damit

$$P(|x| > x_0) = 1 - \int_{-x_0}^{x_0} dx|\psi(x)|^2 = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 dae^{-a^2} = 1 - \text{erf}(1) \tag{13}$$

wobei wir die Symmetrie der Wellenfunktion benutzt haben, $a = x/x_0$ substituiert und $\text{erf}(x)$ die Errorfunktion ist. Numerische Berechnung ergibt

$$P(|x| > x_0) \approx 0.157 \tag{14}$$