



**Übungen zur Theoretischen Physik III für Lehramtskandidaten
 (Quantenmechanik+Statistische Physik)
 SS 2010, Blatt 5**

Aufgabe 10: Drehimpuls

a) (1 Punkt) zu zeigen: $[\hat{L}_1, \hat{L}_2] = i\hbar\hat{L}_3$

Aus der klassischen Mechanik wissen wir, dass der Drehimpuls definiert ist als:

$$\underline{\hat{L}} = \underline{\hat{x}} \times \underline{\hat{p}} = \begin{pmatrix} \hat{x}_2\hat{p}_3 - \hat{x}_3\hat{p}_2 \\ \hat{x}_3\hat{p}_1 - \hat{x}_1\hat{p}_3 \\ \hat{x}_1\hat{p}_2 - \hat{x}_2\hat{p}_1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

wobei $\hat{x}_l, \hat{p}_l, \hat{L}_l$ mit $l = 1, 2, 3$ eine andere Schreibweise für die Komponenten der Vektoren $\underline{\hat{x}}, \underline{\hat{p}}, \underline{\hat{L}}$ ist.

Aus (1) folgt:

$$[\hat{L}_1, \hat{L}_2] = [(\hat{x}_2\hat{p}_3 - \hat{x}_3\hat{p}_2), (\hat{x}_3\hat{p}_1 - \hat{x}_1\hat{p}_3)] \quad (2)$$

$$= [\hat{x}_2\hat{p}_3, \hat{x}_3\hat{p}_1] - [\hat{x}_2\hat{p}_3, \hat{x}_1\hat{p}_3] - [\hat{x}_3\hat{p}_2, \hat{x}_3\hat{p}_1] + [\hat{x}_3\hat{p}_2, \hat{x}_1\hat{p}_3] \quad (3)$$

Dabei wurde im zweiten Schritt die Kommutator Algebra ausgenutzt.

Da $[\hat{x}_l, \hat{p}_{l'}] = i\hbar\delta_{ll'}$ gilt, verschwinden zudem die Kommutatoren $[\hat{x}_2\hat{p}_3, \hat{x}_1\hat{p}_3]$ und $[\hat{x}_3\hat{p}_2, \hat{x}_3\hat{p}_1]$.

Die zwei restlichen Kommutatoren können wie folgt umgeschrieben werden:

$$[\hat{x}_2\hat{p}_3, \hat{x}_3\hat{p}_1] + [\hat{x}_3\hat{p}_2, \hat{x}_1\hat{p}_3] \quad (4)$$

$$= \hat{x}_2[\hat{p}_3, \hat{x}_3]\hat{p}_1 + \hat{p}_2[x_3, \hat{p}_3]\hat{x}_1 = -i\hbar\hat{x}_2\hat{p}_1 + i\hbar\hat{p}_2\hat{x}_1 \quad (5)$$

$$= i\hbar(\hat{p}_2\hat{x}_1 - \hat{x}_2\hat{p}_1) = i\hbar\hat{L}_3 \quad (6)$$

b) (3 Punkte)

Mit der Transformation zwischen kartesischen und räumlichen Polarkoordinaten (Kugelkoordinaten), soll gezeigt werden, dass der Differentialoperator in Kugelkoordinaten geschrieben werden kann als:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \frac{1}{r} \frac{\sin(\varphi)}{\sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r} \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \cos(\vartheta) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin(\vartheta) \frac{\partial}{\partial \vartheta} \quad (9)$$

Dazu verwenden wir:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (10)$$

was analog für $\frac{\partial}{\partial z}$ und $\frac{\partial}{\partial y}$ gilt. Unter Verwendung von Kugelkoordinaten gilt es also folgende Ableitungen auszurechnen:

für (7)

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r} = \cos(\varphi) \sin(\vartheta) \quad (11)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\arctan \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right) \right) = \frac{x}{z \sqrt{x^2 + y^2}} \frac{1}{1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2}} = \frac{1}{r} \cos(\varphi) \cos(\vartheta) \quad (12)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\arctan \left(\frac{y}{x} \right) \right) = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{1}{r} \frac{\sin(\varphi)}{\sin(\vartheta)} \quad (13)$$

für (8)

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \sin(\varphi) \sin(\vartheta) \quad (14)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \frac{1}{r} \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \quad (15)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{r} \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\vartheta)} \quad (16)$$

für (9)

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \cos(\vartheta) \quad (17)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial z} = -\frac{1}{r} \sin(\vartheta) \quad (18)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (19)$$

Einsetzen von (11),(12),(13) in (10) ergibt (7). Analog für $\frac{\partial}{\partial y}$ und $\frac{\partial}{\partial z}$

c) (2 Punkte) Zu zeigen, dass \hat{L}_z in Kugelkoordinaten die Form $\hat{L}_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi}$ hat. Dazu benutzen wir aus Aufgabenteil a):

$$\hat{L}_z = \hat{x}_1 \hat{p}_2 - \hat{x}_2 \hat{p}_1 \quad (20)$$

$$\text{Ortsdarstellung: } \hat{L}_z = \frac{\hbar}{i} x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\hbar}{i} x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \quad (21)$$

wobei x_1, x_2 in Kugelkoordinaten gegeben sind als $x_1 = r \cos(\varphi) \sin(\vartheta)$ und $x_2 = r \sin(\varphi) \sin(\vartheta)$. Zudem wissen wir aus Aufgabenteil b), dass die Differentialoperatoren $\frac{\partial}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial}{\partial x_2}$ in Ku-

gelkoordinaten geschrieben werden können als (7) und (8).

$$\frac{\hbar}{i}x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_1} \quad (22)$$

$$= \frac{\hbar}{i}r\cos(\varphi)\sin(\vartheta)\left(\sin(\vartheta)\sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos(\vartheta)\sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r}\frac{\cos(\varphi)}{\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \quad (23)$$

$$- \frac{\hbar}{i}r\sin(\varphi)\sin(\vartheta)\left(\sin(\vartheta)\cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos(\vartheta)\cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial\vartheta} - \frac{1}{r}\frac{\sin(\varphi)}{\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \quad (24)$$

$$= \frac{\hbar}{i}(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi))\frac{\partial}{\partial\varphi} \quad (25)$$

$$= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi} = \hat{L}_z \quad (26)$$

d) (2 Punkte) Es soll die folgende Eigenwertgleichung gelöst und die Eigenwerte λ bestimmt werden:

$$\hat{L}_z\phi(\varphi) = \lambda\phi(\varphi) \quad (27)$$

$$\text{mit (26)} \rightarrow \phi'(\varphi) - i\frac{\lambda}{\hbar}\phi(\varphi) = 0 \quad \text{Dgl- 1.Ordnung} \quad (28)$$

$$\text{Lösung: } \phi(\varphi) = \phi(0) e^{i\frac{\lambda}{\hbar}\varphi} \quad (29)$$

Dabei können die Eigenwerte λ über die Randbedingung $\phi(\varphi + 2\pi) = \phi(\varphi)$ bestimmt werden

$$e^{i\frac{\lambda}{\hbar}(\varphi+2\pi)} = e^{i\frac{\lambda}{\hbar}\varphi} \quad (30)$$

$$\rightarrow e^{i\frac{\lambda}{\hbar}2\pi} = 1 \quad (31)$$

Gleichung (29) ist erfüllt, wenn für λ gilt:

$$\lambda = m\hbar, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (32)$$

Somit können die Eigenwerte des Impulsoperators in z-Richtung nur diskrete Werte annehmen. Sie sind also gequantelt. Dabei wird m auch magnetische Quantenzahl genannt.

$$\hat{L}_z\phi(\varphi) = m\hbar\phi(\varphi) \quad (33)$$

Aufgabe 11: (1 Punkt) Wirkung des Operators $e^{i\alpha\hat{L}_z}$ auf eine Funktion $\psi(x, y, z)$.

Um die Wirkung des Operator zu bestimmen, verwenden wir Kugelkoordinaten

$$e^{i\alpha\hat{L}_z}\psi(x, y, z) = e^{\alpha\frac{\partial}{\partial\varphi}}\psi(r, \vartheta, \varphi) \quad (34)$$

Mit dem Satz von Taylor $f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (h\frac{\partial}{\partial x})^n f(x)$ ergibt sich für die Wirkung des Operators in Kugelkoordinaten:

$$e^{\alpha\frac{\partial}{\partial\varphi}}\psi(r, \vartheta, \varphi) = \psi(r, \vartheta, \varphi + \alpha) \quad (35)$$

$$= \psi(x', y', z) \quad (36)$$

mit den neuen kartesischen Koordinaten:

$$x' = r \cos(\varphi + \alpha) \sin(\vartheta) = r \sin(\vartheta) [\cos(\varphi) \cos(\alpha) - \sin(\varphi) \sin(\alpha)] \quad (37)$$

$$y' = r \sin(\varphi + \alpha) \sin(\vartheta) = r \sin(\vartheta) [\sin(\varphi) \cos(\alpha) + \cos(\varphi) \sin(\alpha)] \quad (38)$$

Jetzt müssen noch die neuen Koordinaten durch die Alten (x, y) ausgedrückt werden:

$$x' = x \cos(\alpha) - y \sin(\alpha) \quad (39)$$

$$y' = y \cos(\alpha) + x \sin(\alpha) \quad (40)$$

Damit ergibt sich für die Wirkung des Operator:

$$e^{\frac{\hbar}{i} \alpha \hat{L}_z} \psi(x, y, z) = \psi(x \cos(\alpha) - y \sin(\alpha), y \cos(\alpha) + x \sin(\alpha), z) \quad (41)$$

was einer Drehung im Raum um die z -Achse um dem Winkel α entspricht.