

Kapitel 1

Teilchen- und Wellenbild des Elektrons: Die Ursprünge der Quantenmechanik

1.1 Das Versagen der klassischen Mechanik

Systeme, die mit der klassischen Mechanik nicht verstanden werden können, aber durch die Quantenmechanik erklärt werden:

Problem	Quantenmechanische Lösung
1. Lichtelektrischer Effekt $E_{\text{kin}} \propto$ Lichtintensität	Lichtquanten $E = h\nu$
2. Davisson-Germer-Experiment (Beugung von Elektronen an Kristall)	Elektronenwellen $\lambda = h/p$ (DE BROGLIE)
3. Problem: Widerspruch mit Teilchenbild	Heisenbergsche Unschärferelation $\Delta p \Delta x \geq \frac{1}{2}\hbar$.
4. Atombau: (a) Stabilität – wieso fallen Elektronen nicht in den Kern? (b) Lichtemission: Wieso scharfe Linien? (c) Periodensystem der Elemente	Löse Schrödingergleichung für Elektron im Zentralpotential
5. Stern-Gerlach-Experiment: Wieso spaltet der Elektronenstrahl im Magnetfeld auf?	Elektronen-Spin (Elektron hat quantisiertes magnetisches Moment)
6. Verhalten fester Stoffe: (a) chemische Bindung: Wie kommt sie zustande? (b) Wann ist ein Stoff Metall, Isolator oder Halbleiter? (c) Ferromagnetismus	Lösung der Schrödingergleichung für viele Teilchen
7. PLANCK'sche Strahlungsformel, Verhalten der spezifischen Wärme fester Körper, Laser, Maser	Lösung der Schrödingergleichung für viele harmonische Oszillatoren

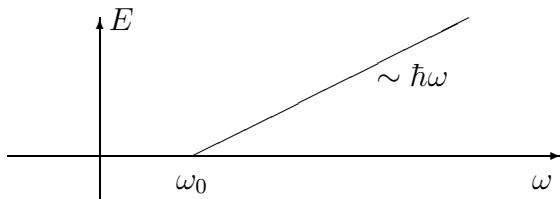
1.2 Geschichte der Quantenmechanik

1900 PLANCK'sche Strahlungsformel

Die klassische Theorie, welche eine Energiedichte (Energie im Intervall zwischen ω und $\omega + d\omega$) proportional dem Quadrat der Frequenz ergibt, $\rho(\omega, T) \sim \omega^2 T$, führt auf eine unendliche Gesamtenergie $\int_0^\infty d\omega \rho(\omega, T) = \infty$ (Ultraviolett Katastrophe). PLANCK postulierte harmonische Oszillatoren mit quantisierter Energie $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$, $h = 2\pi\hbar = 6.6 \cdot 10^{-34}$ Js. (Die Nullpunktenergie $\frac{1}{2}\hbar\omega$ findet sich noch nicht bei Planck.) Die resultierende Strahlungsformel besaß endliche Gesamtenergie und erklärte das Experiment:

$$\rho(\omega, T) \sim \frac{\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$$

1905 EINSTEIN'S Deutung des Photoeffektes: Einführung von Lichtquanten der Energie $\hbar\omega$.



$$E_{\text{kin}} = \begin{cases} \hbar\omega - W_A & \text{für } \hbar\omega \geq W_A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die max. Energie hängt von der Frequenz ω des einfallenden Lichtes ab, nicht von dessen Intensität!

Die Emission von Elektronen aus der Metallplatte setzt schon bei Licht geringer Intensität praktisch ohne Zeitverzögerung ein. \longrightarrow Duale Natur des Lichts.

1912 Das Atommodell von RUTHERFORD (ein leichtes Elektron kreist um einen schweren, im Vergleich zum Bahnradius kleinen Kern) gab Rätsel auf: Das Elektron müßte auf seiner Keplerbahn ständig Energie abstrahlen und in den Kern stürzen!

1913 BOHR'sches Atommodell: Im Widerspruch zur Klassischen Physik postulierte BOHR die Existenz stabiler Bahnen des Elektrons im Wasserstoffatom. Es sollten genau die Bahnen stabil sein, in denen der Bahndrehimpuls ganzzahlige Vielfache von \hbar annimmt. Dieses Modell ist ein Vorläufer der SOMMERFELDSCHEN'schen Quantisierungsbedingung $\oint pdq = E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$. (Die Nullpunktenergie $\frac{1}{2}\hbar\omega$ wurde von SOMMERFELD allerdings noch nicht angegeben.)

1924+1927 Louis de Broglie postuliert dass alle Materie (nicht nur Photonen) der Welle-Teilchen Dualität gehorchen, folglich eine Wellenlänge $\lambda = h/p$ besitzen.

Dies entspricht der Einsteinbeziehung für Photonen:

$$E = \underbrace{m}_{?} c^2 \Rightarrow \omega\hbar = \underbrace{mc}_{p} c \Rightarrow p = \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{2\pi\hbar\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

Exp.: (Elektronenbeugung am Kristall): Clinton Davisson & Lester Germer, Bell Labs.

1925 Die HEISENBERG'sche Unschärferelation $\Delta p \Delta x \geq \frac{1}{2}\hbar$.

1926 SCHRÖDINGER stellt eine (nichtrelativistische) Wellengleichung für das Elektron auf und begründet damit die "Wellenmechanik" oder "Quantenmechanik".

1928 BORN führt eine statistische Deutung der Wellenfunktion ein.

Mit der Schrödingergleichung (und der Heisenbergschen Matrizenmechanik) und der statistische Deutung der Wellenfunktion ist die Quantenmechanik "erfunden". Es gibt also wieder eine Vorschrift, nach der Meßergebnisse vorhergesagt werden können, auch wenn die Vorhersagen nur noch statistische Aussagen sind. (Erstaunlicherweise ist es dazu im allgemeinen nicht notwendig, zu verstehen, wie der Meßprozeß selbst physikalisch abläuft.)

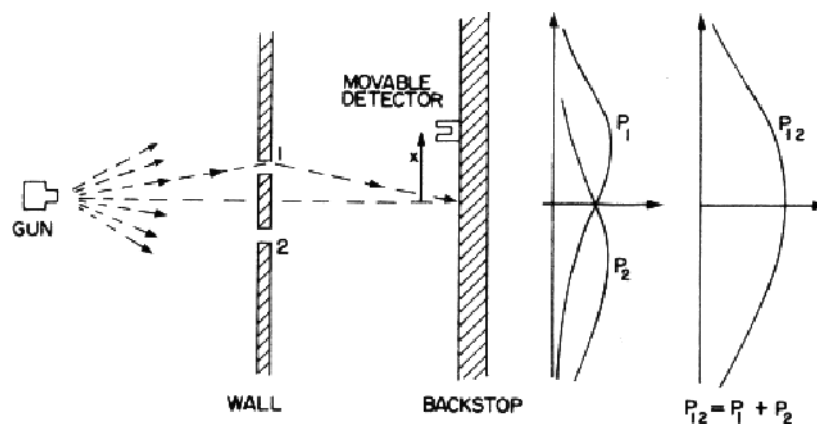
Die Vorlesung geht daher nicht historisch vor, sondern baut auf der Schrödingergleichung als der zentralen Gleichung der Quantenmechanik auf.

1.3 Die HEISENBERG'sche Unschärferelation: Teilchenbild und Wellenbild des Elektrons

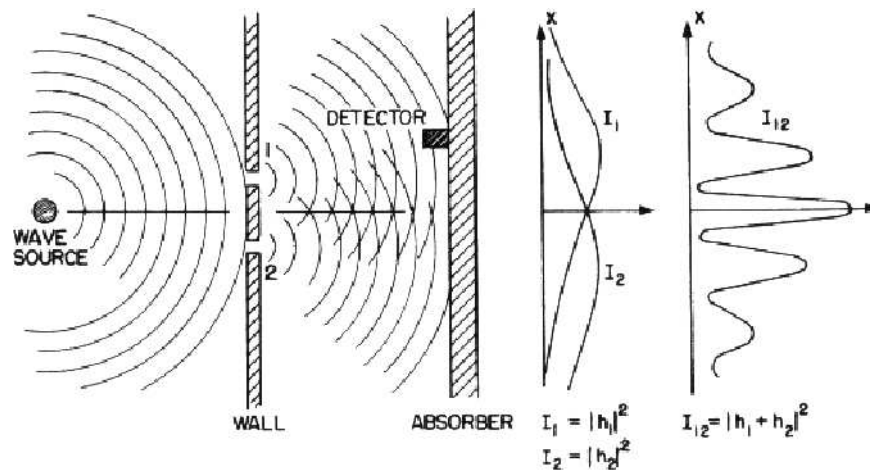
Die grundlegende Frage der Quantenmechanik ist: Wie verhält sich Materie auf atomarer Skala? Newton hatte die Auffassung, daß Licht aus Teilchen besteht (Goethes Auffassung des Sehprozesses war sogar, daß das Licht vom Auge ausgeht). Später fand man, daß sich Licht wie Wellen verhält. Im 20. Jahrhundert entdeckte man wieder Teilcheneigenschaften des Lichts. Elektronen hingegen wurden, wie Protonen und Neutronen auch, als Teilchen angesehen, aber dann entdeckte man, daß sich Elektronen auch wie Wellen verhalten können. Was also „ist“ ein Elektron? Offenbar *weder* Teilchen *noch* Welle! Es scheint also nicht möglich, Elektronen (und Licht) mit jenen Begriffen allein zu beschreiben, die wir aus der makroskopischen Anschauung gewonnen haben. Eine neue Theorie ist daher nötig, die Quantenmechanik. Da aber Elektronen, Protonen, Neutronen und Licht (Photonen) gleichartiges Verhalten zeigen können, erwarten wir, sie mit der gleichen Theorie beschreiben zu können.

Zwei mechanische Experimente

Bevor wir Quantenexperimente durchführen, wollen wir uns zwei mechanische makroskopische Experimente ansehen. Als erstes betrachten wir eine Art Tontaubenschießen mit Doppelspalt (der Betreiber des Jahrmarktstandes habe für ein hinreichend schlecht schieiendes Gewehr mit breiter Streuung gesorgt), und je nachdem, ob Spalt 1 oder 2 oder beide geöffnet sind, können wir auf der Rückseite der Wand die Verteilungen P_1 , P_2 und P_{12} messen. Wir finden heraus, daß $P_{12} = P_1 + P_2$. Das ist das Verhalten, was wir von „Teilchen“ erwarten, und was historisch auch für atomare Teilchen vermutet wurde.



Das zweite Experiment machen wir mit Wasserwellen. Wieder messen wir für einzeln geöffnete Spalte und für den Fall, daß beide Spalte geöffnet sind. Statt Statistik über Einzelereignisse zu machen, können wir als Intensitäten das Quadrat der Wellenhöhe messen: $I_1 = |h_1|^2$ und $I_2 = |h_2|^2$.

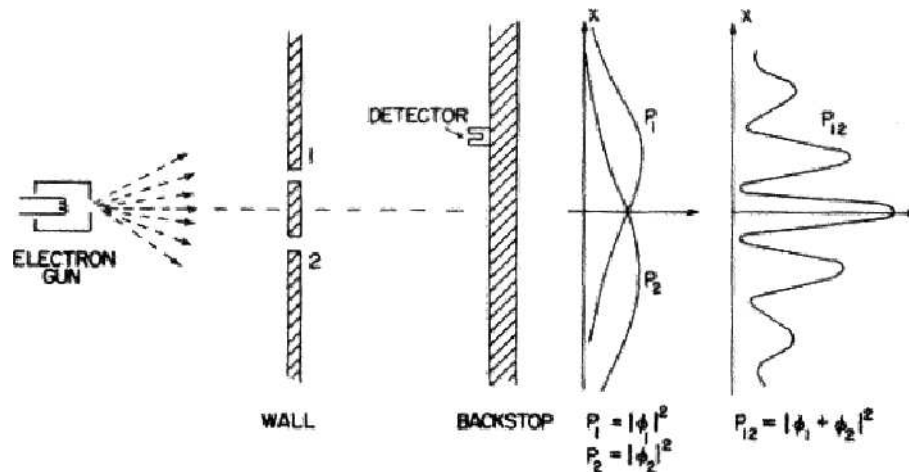


Wenn wir beide Spalte öffnen, messen wir ein Interferenzmuster, und die Intensität ist nicht mehr die Summe der Einzelintensitäten: $I_{12} = I_1 + I_2$. Wir können aber das Experiment trotzdem quantitativ beschreiben: Bei kleinen Wellenhöhen können wir näherungsweise annehmen, daß sich die Wellenhöhen linear überlagern, $h_{12} = h_1 + h_2$. Dann gilt (δ sei die Phasendifferenz zwischen den beiden Wellen)

$$I_{12} = |h_{12}|^2 = |h_1 + h_2|^2 = |h_1|^2 + |h_2|^2 + 2|h_1||h_2|\cos\phi = I_1 + I_2 + \underbrace{2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta}_{\text{Interferenzterm}}$$

Wir haben durch Einführung einer Wellenhöhe – die in diesem mechanischen Fall auch meßbar ist – eine quantitative Beschreibung des Experiments gefunden, die den Interferenzterm erklärt.

Ein Experiment mit Elektronen



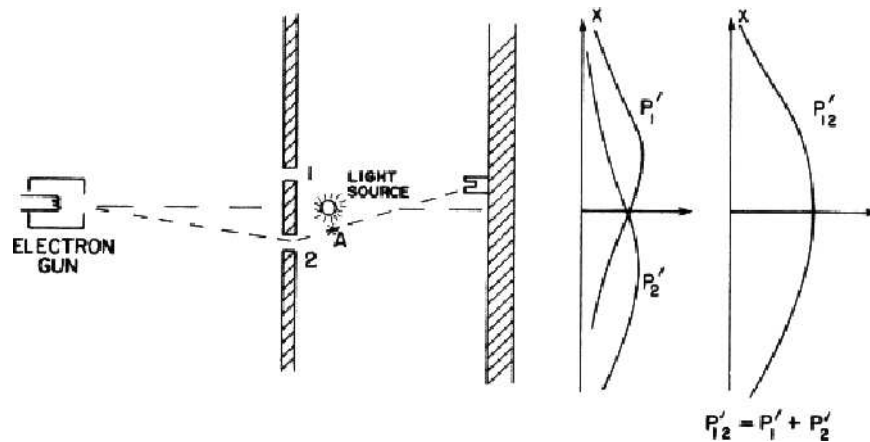
Wenn wir das Doppelspaltexperiment mit Elektronen durchführen, so finden wir – wie bei den Wasserwellen – ein Interferenzmuster, und es gilt wieder $P_{12} = P_1 + P_2$. Also verhalten sich Elektronen (nicht immer) wie Teilchen – sie können sich wie Wellen verhalten. Um das Modell quantitativ zu beschreiben, können wir wie bei den Wasserwellen eine Art Wellenhöhe einführen, so daß

$$P_1 = |\phi_1|^2, \quad P_2 = |\phi_2|^2, \quad P_{12} = |\phi_{12}|^2 = |\phi_1 + \phi_2|^2.$$

Dabei darf ϕ jeweils auch komplex sein. Damit haben wir eine Größe eingeführt, um das Experiment beschreiben zu können. Was ϕ physikalisch bedeutet, und ob es meßbar ist, ist noch offen. In diesem Fall wissen wir nicht, durch welchen Spalt das Elektron gekommen ist. Was passiert aber, wenn wir die Elektronen beobachten?

Das Elektron wird beobachtet

Wir wollen das Elektron mit Licht beobachten, da Licht an Elektronen gestreut wird. Also bringen wir hinter dem Doppelspalt eine Lichtquelle an:



Das Ergebnis des Experimentes ist überraschend und zeigt eine grundlegende Eigenschaft quantenmechanischen Verhaltens: Sobald wir mit unserem Mikroskop „sehen“, ob das Elektron durch Spalt 1 oder 2 gegangen ist, verschwindet die Interferenzfigur! Quantitativ erhalten wir $P'_{12} = P'_1 + P'_2$, also genau dasselbe Verhalten wie bei makroskopischen Teilchen! Woran liegt das? Wir haben das Elektron dadurch beobachtet, daß wir es mit Licht in Wechselwirkung gebracht haben, dabei erfährt das Elektron eine Impulsänderung. Diese *Beobachtung* stört das Elektron derart, daß keine Interferenz beobachtet wird.

Die Unschärferelation

Nun wollen wir abschätzen, wie in diesem Experiment sich die Beobachtung quantitativ auswirkt. Dazu betrachten wir

(a) die Wirkungsweise des Mikroskops: Zwei Punkte mit Abstand Δx (hier: Elektron mit Ortsunschärfe Δx) werden als getrennt erkannt, wenn noch die erste Beugungsordnung ins Objektiv gelangt, also $\lambda = \Delta x \sin \alpha$.

(b) Mit der DE BROGLIE-Beziehung ordnen wir dem Licht einen Impuls $p_L = h/\lambda$ zu.

(c) Nach dem Impulssatz soll betragsweise $\Delta p_L = \Delta p_e$ gelten, und der maximale Ablenkwinkel kann $\sin \alpha = \Delta p/p$ sein.

Wenn wir diese drei Beziehungen verwenden, bekommen wir für das Produkt von Orts- und Impulsunschärfe des Elektrons $\Delta x \Delta p_e = \Delta x \Delta p_L = \frac{\lambda}{\sin \alpha} \frac{h}{\lambda} \sin \alpha = h$. Wir können Ort und Impuls des Elektrons also nicht genau messen, und das Produkt $\Delta x \Delta p$ ist nach unserer Abschätzung von der Größenordnung des Planck'schen Wirkungsquantums.

Dies ist die HEISENBERG'sche Unschärferelation: Bei gleichzeitiger Messung von Ort und Impuls eines Teilchens gilt stets ($\hbar := \frac{h}{2\pi}$)

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (1.1)$$

Diese Relation wird später exakt als Konsequenz der Wellenmechanik abgeleitet, und tatsächlich ist es eine Konsequenz der *Welleneigenschaft* allein: Bei jedem Wellenpaket endlicher Länge sind Ort und Wellenlänge nur mit endlicher Genauigkeit meßbar.

Die Unschärferelation *verhindert* also einen direkten Widerspruch zwischen Wellenbild und Teilchenbild. Durch die Messung wird das System gestört, das Teilchen ist nicht ohne Wechselwirkung beobachtbar.

Je nach „Fragestellung durch die Meßapparatur“ verhält sich das Elektron also als Welle oder als Teilchen.