Universität des Saarlandes
Fachrichtung 7.1 – Theoretische Physik
Prof. Dr. H. G. Schuster

Übungen zur Theoretischen Physik III für Lehramtskandidaten (Quantenmechanik+Statistische Physik)
SS 2010, Blatt 4

5+8. Aufgabe: Harmonischer Oszillator (2+2+2 Punkte)

a) Um die angegebenen Gleichungen herzuleiten werden wir folgende Gleichungen verwenden.

$$
\begin{aligned}
b^\dagger b - bb^\dagger &= -1 && (1)\\
b^\dagger b|n\rangle &= \epsilon_n|n\rangle && (2)\\
b|0\rangle &= 0 && (3)
\end{aligned}
$$

Gl. (2) ist der mathematische Ausdruck, dass die Zustände $|n\rangle$ Eigenzustände des harmonischen Oszillators sind wobei die Eigenwerte mit ϵ_n bezeichnet werden und laut Vorlesung durch $\epsilon_n = (E_n - 1/2)/\hbar\omega$ mit den Energieeigenwerten verbunden sind. Gl. (3) sagt, dass b auf den Grundzustand $|0\rangle$ angewendet 0 ergibt. Dies zeigt auch, dass der zugehörige Eigenwert $\epsilon_0 = 0$ ist. Dies wurde in der Vorlesung gezeigt.
Nun wenden wir $b^\dagger$ auf Gl. (2) von links an

$$
\begin{aligned}
b^\dagger b^\dagger b|n\rangle &= \epsilon_n b^\dagger|n\rangle && (4)\\
b^\dagger(bb^\dagger - 1)|n\rangle &= \epsilon_n b^\dagger|n\rangle && (5)\\
b^\dagger b(b^\dagger|n\rangle) &= (\epsilon_n + 1)(b^\dagger|n\rangle)\,. && (6)
\end{aligned}
$$

wobei wir in der zweiten Linie Gl. (1) verwendet haben. Ein Vergleich mit Gleichung. (2) zeigt, dass $b^\dagger|n\rangle$ auch ein Eigenzustand des harmonischen Oszillators ist, mit Eigenwert $\epsilon_n + 1$. Durch wiederholtes Anwenden des Operators $b^\dagger$ finden wir immer wieder Eigenzustände des harmonischen Oszillators und erhöhen den zugehörigen Eigenwert um 1. Wir finden also

$$
\begin{aligned}
|1\rangle &= \alpha_0 b^\dagger|0\rangle && (7)\\
|2\rangle &= \alpha_1 b^\dagger|1\rangle && (8)\\
|n+1\rangle &= \alpha_n b^\dagger|n\rangle && (9)
\end{aligned}
$$

wobei die zugehörigen Eigenwerte $\epsilon_1 = \epsilon_0 + 1 = 1$, $\epsilon_2 = \epsilon_1 + 1 = 2$ und $\epsilon_{n+1} = n + 1$ lauten. Die konstanten α_j $(j = 0, 1, n)$ werden durch die Normierung bestimmt.

$$
\begin{aligned}
1 = \langle n+1|n+1\rangle &= |\alpha_n|^2\langle n|bb^\dagger|n\rangle && (10)\\
&= |\alpha_n|^2\langle n|(b^\dagger b + 1|n\rangle && (11)\\
&= |\alpha_n|^2(n+1) && (12)
\end{aligned}
$$

wobei wieder Gl. (1) mit der Normierungsbedingung $\langle n|n\rangle$ verwendet wurde und es folgt $\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Damit ergibt Gl. (9)

$$
b^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \qquad (13)
$$

Damit finden wir

$$\begin{aligned} b|n\rangle &= b\frac{1}{\sqrt{n}}b^\dagger|n-1\rangle && (14)\\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}(b^\dagger b+1)|n-1\rangle && (15)\\ &= \sqrt{n}|n-1\rangle && (16)\end{aligned}$$

Und ein Vergleich der rechten Seite der ersten Zeile mit der letzten Zeile liefert sofort

$$bb^\dagger|n\rangle = (n+1)|n\rangle \tag{17}$$

wobei wir $n-1$ mit n ersetzt haben. Die letzte Gleichung des Aufgabenblatts ergibt sich durch

$$\begin{aligned} |n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n}}b^\dagger|n-1\rangle && (18)\\ &= \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}b^\dagger b^\dagger|n-2\rangle && (19)\\ &= \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(b^\dagger\right)^n|0\rangle && (20)\end{aligned}$$

b)

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass

$$b^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mp\frac{\partial}{\partial x'}+x') \tag{21}$$

wobei $b^+ = b^\dagger$, $b^- = b$ und $x' = x/x_0$ ist die skalierte Ortsvariable mit $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$. Damit finden wir also

$$\begin{aligned} b^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mp x_0\frac{\partial}{\partial x}+x/x_0)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}(m\omega\hat{x}\mp\imath\hat{p}) && (22)\end{aligned}$$

wobei $\hat{p} = -\imath\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ verwendet wurde. Auflösen nach $\hat{x}$ und $\hat{p}$ liefert also

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(b^\dagger+b) && (23)\\ \hat{p} &= \imath\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(b^\dagger-b) && (24)\end{aligned}$$

Damit finden wir

$$\begin{aligned} \langle n|\hat{x}|n'\rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\langle n|b^\dagger|n'\rangle+\langle n|b|n'\rangle\right)\\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{n'+1}\delta_{n,n'+1}+\sqrt{n'}\delta_{n,n'-1}\right) && (25)\\ \langle n|\hat{p}|n'\rangle &= \imath\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\left(\langle n|b^\dagger|n'\rangle-\langle n|b|n'\rangle\right)\\ &= \imath\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\left(\sqrt{n'+1}\delta_{n,n'+1}-\sqrt{n'}\delta_{n,n'-1}\right) && (26)\end{aligned}$$

c)
Wir haben

$$\hat{x}(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(b^\dagger(t) + b(t)) \tag{27}$$

Nun ist die Zeitentwicklung von $b^\pm$ gegeben durch

$$\imath\hbar\dot{b^\pm} = [b^\pm, H] \tag{28}$$

Wobei $H = \hbar\omega(b^\dagger b - 1/2)$ der Hamiltonoperator des harmonischen Oszillators ist. Damit ergibt sich mit Gl.(1) für den Kommutator

$$\dot{b^\pm} = \pm\imath\omega b^\pm \tag{29}$$

mit der Lösung

$$b^\pm(t) = e^{\pm\imath\omega t}b^\pm(0) \tag{30}$$

Es ergibt sich also

$$\begin{aligned}
\hat{x}(t) &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(e^{\imath\omega t}b^+(0) + e^{-\imath\omega t}b^-(0)) \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(e^{\imath\omega t}\frac{m\omega\hat{x}(0) - \imath\hat{p}(0)}{\sqrt{2m\omega\hbar}} + e^{-\imath\omega t}\frac{m\omega\hat{x}(0) + \imath\hat{p}(0)}{\sqrt{2m\omega\hbar}}) \\
&= \hat{x}(0)\cos\omega t + \frac{\hat{p}(0)}{m\omega}\sin\omega t
\end{aligned} \tag{31}$$

wobei Gl. (22) verwendet wurde.

8c)(2 Punkte)
Es soll die Zeitentwicklung des Erwartungswertes $\langle\psi|x(t)|\psi\rangle$ berechnet werden. Dazu werden wir Gl. (31) benutzen. Wir müssen dann nur noch die folgenden Erwartungswerte bestimmen

$$\begin{aligned}
\langle\psi|x(0)|\psi\rangle &= (a^*b\langle 0|x|1\rangle + ab^*\langle 1|x|0\rangle) \\
&= \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\,\Re ab^* \qquad (32)\\
\langle\psi|p(0)|\psi\rangle &= (a^*b\langle 0|p|1\rangle + ab^*\langle 1|p|0\rangle) \\
&= -\sqrt{2m\omega\hbar}\,\Im ab^* \qquad (33)
\end{aligned}$$

wobei wir Gl. (25) und Gl. (26) (daraus folgt auch, dass $\langle 0|x|0\rangle = \langle 1|x|1\rangle = 0$ und gleiches gilt für p, da die Matrixelemente von x und p nur dann unterschiedlich von 0 sind, wenn sich n und n' (hier 0 und 1) um eins unterscheiden ($|n - n'| = 1$)) verwendet haben. Weiterhin bezeichnet $\Re z$ ($\Im z$) den Realteil (Imaginärteil) von z. Mit Gl. (31) ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
\langle\psi|x(t)|\psi\rangle &= \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\,(\Re ab^*\cos\omega t - \Im ab^*\sin\omega t) \\
&= \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}|ab|\,(\cos\alpha\cos\omega t - \sin\alpha\sin\omega t) \\
&= \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}|ab|\cos(\omega t + \alpha)
\end{aligned} \tag{34}$$

wobei $ab^* = |ab|e^{\imath\alpha}$. .

9. Aufgabe: (5 Punkte)

a)
Um die Eigenwerte von H zu finden müssen wir folgende Gleichung lösen

$$\det \begin{pmatrix} \epsilon - \lambda & \Delta \\ \Delta & -\epsilon - \lambda \end{pmatrix} = 0 \tag{35}$$

Damit ergibt sich die charakteristische Gleichung

$$-(\epsilon - \lambda(\epsilon + \lambda) - \Delta^2 = 0 \tag{36}$$

was die Eigenwerte $\lambda_\pm = \pm\hbar\omega$ mit $\omega = \frac{1}{\hbar}\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}$ ergibt.
Die zugehörigen Eigenzustände seinen nun $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$ und daher

$$H|\alpha\rangle = \hbar\omega|\alpha\rangle \tag{37}$$
$$H|\beta\rangle = -\hbar\omega|\beta\rangle \tag{38}$$

Wir finden nun aus der Schrödingergleichung die Zeitentwicklung

$$\imath\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\alpha\rangle = H|\alpha\rangle \tag{39}$$
$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial t}|\alpha\rangle = -\imath\omega|\alpha\rangle \tag{40}$$

und damit finden wir

$$|\alpha(t)\rangle = |\alpha(0)\rangle e^{-\imath\omega t} \tag{41}$$

und in derselben Weise gilt

$$|\beta(t)\rangle = |\beta(0)\rangle e^{\imath\omega t} \tag{42}$$

Wir können den Hamiltonoperator H schreiben als

$$H = H_0 + V \tag{43}$$

wobei

$$H_0 = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & -\epsilon \end{pmatrix} \tag{44}$$
$$V = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \tag{45}$$

Der Hamiltonoperator H_0 hat offensichtlich die Eigenzustände (ist schon diagonal)

$$|\varphi_+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{46}$$
$$|\varphi_-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{47}$$

mit den zugehörigen Eigenwerten $\lambda^0_\pm = \pm\omega_0$ wobei $\omega_0 = \frac{\epsilon}{\hbar}$. Die Zeitentwicklung durch H_0 ist also gegeben durch (analog wie oben)

$$|\varphi_\pm(t)\rangle = |\varphi_\pm(0)\rangle e^{\mp\imath\omega_0 t} \tag{48}$$

Nun müssen wir noch die Zeitentwicklung von $|\varphi_\pm(t)\rangle$ durch den gesamten Hamiltonoperator H finden. Dazu entwickeln wir die Eigenzustände $|\varphi_\pm\rangle$ in Eigenzuständen von H

$$|\varphi_\pm\rangle = a_\pm|\alpha\rangle + b_\pm|\beta\rangle \tag{49}$$

Da wir nach Gl. (41) und Gl. (42) die Zeitentwicklung von $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$ kennen können wir damit nun auch die Zeitentwicklung von $|\varphi_\pm\rangle$ bestimmen. Um die Koeffizienten $a_\pm$ und $b_\pm$ zu bestimmen benötigen wir allerdings die explizite Darstellung von $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$ in der Basis von H_0. Wir wählen

$$|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} x_+ \\ y_+ \end{pmatrix} \qquad |\beta\rangle = \begin{pmatrix} x_- \\ y_- \end{pmatrix} \tag{50}$$

und finden damit aus den Eigenwertgleichungen $H|\alpha\rangle = \lambda_+|\alpha\rangle$ und $H|\beta\rangle = \lambda_-|\beta\rangle$

$$\begin{aligned} \epsilon x_\pm + \Delta y_\pm &= \lambda_\pm x_\pm & (51)\\ \Delta x_\pm - \epsilon y_\pm &= \lambda_\pm y_\pm & (52) \end{aligned}$$

wir wählen $x_\pm = 1$ und finden damit $y_\pm = \frac{1}{\Delta}(\lambda_\pm - \epsilon) = \frac{-\epsilon\pm(\epsilon^2+\Delta^2)^{1/2}}{\Delta}$. Damit ergibt sich also für die Eigenzustände

$$|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-\epsilon+(\epsilon^2+\Delta^2)^{1/2}}{\Delta} \end{pmatrix} \qquad |\beta\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-\epsilon-(\epsilon^2+\Delta^2)^{1/2}}{\Delta} \end{pmatrix} \tag{53}$$

Nun gilt

$$|\alpha\rangle - |\beta\rangle = \frac{2(\epsilon^2+\Delta^2)^{1/2}}{\Delta}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2\hbar\omega}{\Delta}|\varphi_-\rangle \tag{54}$$

Damit finden wir also für die Zeitentwicklung von $|\varphi_-\rangle(t)$

$$\begin{aligned} |\varphi_-(t)\rangle &= \frac{\Delta}{2\hbar\omega}(|\alpha(t)\rangle - |\beta(t)\rangle) \\ &= \frac{\Delta}{2\hbar\omega}(|\alpha(0)\rangle e^{-\imath\omega t} - |\beta(0)\rangle e^{\imath\omega t}) & (55) \end{aligned}$$

Aus Gl. (53) können wir nun $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$ durch $|\varphi_\pm\rangle$ ausdrücken und finden

$$\begin{aligned} |\varphi_-(t)\rangle &= \frac{\Delta}{2\hbar\omega}\left[\left(|\varphi_+\rangle + \frac{-\epsilon+\hbar\omega}{\Delta}|\varphi_-\rangle\right)e^{-\imath\omega t} - \left(|\varphi_+\rangle + \frac{-\epsilon-\hbar\omega}{\Delta}|\varphi_-\rangle\right)e^{\imath\omega t}\right] \\ &= \frac{\Delta}{2\hbar\omega}\left[|\varphi_+\rangle\left(e^{-\imath\omega t} - e^{\imath\omega t}\right) + \frac{\hbar|\varphi_-\rangle}{\Delta}\left((\omega-\omega_0)e^{-\imath\omega t} + (\omega_0+\omega)e^{\imath\omega t}\right)\right] \\ &= \frac{-\imath\Delta}{\hbar\omega}\sin\omega t|\varphi_+\rangle + \left(\cos\omega t + \frac{\imath\omega_0}{\omega}\sin\omega t\right)|\varphi_-\rangle & (56) \end{aligned}$$

Wir sehen also, das durch den Beitrag von V die beiden Eigenzustände $|\varphi_\pm\rangle$ mit der Zeit gemischt werden. Dies kann man leicht verstehen, wenn man die Wirkung von V auf $|\varphi_\pm\rangle$ anschaut

$$V|\varphi_\pm\rangle = \Delta|\varphi_\mp\rangle \tag{57}$$

d.h. V angewendet auf einen der beiden Eigenzustände von H_0 ergibt den anderen gewichtet mit der Stärke Δ von V. Wenn sich das System zum Zeitpunkt $t = 0$ in $|\varphi_-\rangle$

befindet, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich zum Zeitpunkt t im Zustand $|\varphi_-\rangle$ befindet gegeben durch

$$
\begin{aligned}
P_-(t) &= |\langle\varphi_-(0)|\varphi_-(t)\rangle|^2 \\
&= \left|\cos\omega t + \frac{\imath\omega_0}{\omega}\sin\omega t\right|^2 \\
&= \cos^2\omega t + \frac{\epsilon^2}{\epsilon^2+\Delta^2}\sin^2\omega t && (58)\\
&= \cos^2\omega t + \frac{\epsilon^2+\Delta^2-\Delta^2}{\epsilon^2+\Delta^2}\sin^2\omega t && (59)\\
&= 1 - \frac{\Delta^2}{\epsilon^2+\Delta^2}\sin^2\omega t && (60)
\end{aligned}
$$

Wenn wir also $V = 0$ ($\Delta = 0$) setzen, so entspricht das der Dynamik nur durch H_0 und wir sehen, dass das System sich zu jedem Zeitpunkt in $|\varphi_-\rangle$ befindet wenn es am Anfang in diesem Zustand war. Sobald allerdings $\Delta \neq 0$ finden wir ein Oscillation in der Besetzungswahrscheinlichkeit des Zustandes $|\varphi_-\rangle$ wobei das System immer zu den Zeitpunkten $t_n = \frac{\pi n}{\omega}$ (n ganzzahlig) zum Anfangszustand zurückkehrt. Wenn wir nun nur die Dynamik durch V anschauen ($\epsilon = 0$) so sehen wir, dass zu den Zeitpunkten $t'_n = \frac{(2n+1)\pi}{2\omega}$ die Wahrscheinlichkeit das System in $|\varphi_-\rangle$ zu finden 0 ist $P_-(t'_n) = 0$. In diesem Fall oszilliert das System also zwischen den beiden Zuständen hin und her. Solche Oszillationen nennt man auch Rabi-Oszillationen. In Fig. (1) ist $P_-(t)$ als Funktion von t für verschiedene Stärken von V aufgetragen.

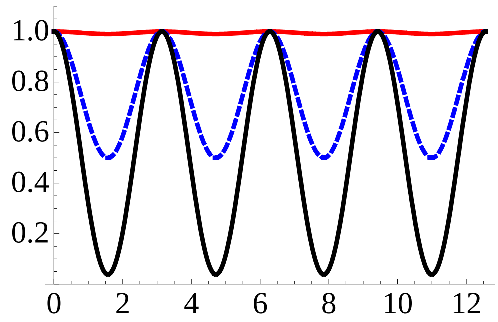

Abbildung 1: Wahrscheinlichkeit $P_-(t)$ als Funktion von Zeit in Einheiten von ω. Dabei ist rot: $\frac{\epsilon}{\Delta} = 0.1$, blau gestrichelt: $\frac{\epsilon}{\Delta} = 1$, schwarz:$\frac{\epsilon}{\Delta} = 5$