Übungen TheoretischePhysik III LAG, SS.2010, Schuster

8. Harmonischer Oszillator:

(a) Zeigen Sie mit Hilfe von $bb^\dagger - b^\dagger b = 1$ dass für die Eigenzustände $|n\rangle$ des harmonischen Oszillators mit $b^\dagger b\,|n\rangle = n\,|n\rangle$ gilt:

$$b^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

$$b\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

$$|n\rangle = \frac{\left(b^\dagger\right)^n}{\sqrt{n!}}\,|0\rangle$$

(2 Punkte)

(b) Zeigen sie, dass für einen harmonischen Oszillator mit der Frequenz ω für die Zeitabhängigkeit im Heisenbergbild gilt

$\hat{x}(t) = \hat{x}\cos(\omega t) + \frac{\hat{p}}{m\omega}\sin(\omega t)$

(2 Punkte)

Hinweis: Drücken Sie $\hat{x}$ und $\hat{p}$ durch b und $b^\dagger$ aus.

(c) Berechnen Sie die Zeitabhängigkeit von $\langle\psi|\,\hat{x}(t)\,|\psi\rangle$ wobei $|\psi\rangle$ eine Überlagerung $|\psi\rangle = a\,|0\rangle + b\,|1\rangle$ der beiden Eigenzustände $|0\rangle$ und $|1\rangle$ des harmonischen Oszillators ist

(2 Punkte)

9. Berechnen Sie die Zeitabhängigkeit der Eigenzustände $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$ des Hamiltonoperators

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \Delta \\ \Delta & -\varepsilon \end{pmatrix}$$

Wählen Sie als Anfangszustand $|\psi(t=0)\rangle$ für die, durch $\hat{H}$ definierte, Zeitentwicklung einen zu

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}$$

gehörigen Eigenzustand $|\varphi\rangle$ und berechnen sie dessen zeitliche Entwicklung. Diskutieren Sie das Resultat indem Sie es mit der Zeitentwicklung von $|\varphi\rangle$ unter $\hat{H}_0$ vergleichen.

(5 Punkte)