Übungen TheoretischePhysik III LAG, SS.2010, Schuster

10. Drehimpuls:

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Vertauschungsrelationen für die Operatoren $\hat{p}_l$ und $\hat{x}_l$ $(l = 1, 2, 3)$ dass für die Drehimpulskomponenten gilt

$$\hat{L}_x\hat{L}_y - \hat{L}_y\hat{L}_x = i\hbar\hat{L}_z$$

(1 Punkt)

(b) Verwenden Sie die Transformationen zwischen kartesischen Koordinaten und räumlichen Polarkoordinaten

$$x = r\cos\varphi\sin\vartheta, \quad y = r\sin\varphi\sin\vartheta, \quad z = r\cos\vartheta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ \tan\varphi = \frac{y}{x},\ \tan\vartheta = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)/z$$

um mit Hilfe von

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial\varphi}, \text{und analog}$$

für $\frac{\partial}{\partial y}$ und $\frac{\partial}{\partial z}$ zu zeigen dass gilt

$$\frac{\partial}{\partial x} = \sin\vartheta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\vartheta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\vartheta} - \frac{1}{r}\frac{\sin\varphi}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\vartheta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\vartheta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r}\frac{\cos\varphi}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$
$$\frac{\partial}{\partial z} = \cos\vartheta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}$$

(3 Punkte)

(c) Zeigen Sie unter Verwendung von (b) , dass $\hat{L}_z$ in räumlichen Polarkoordinaten die Form hat

$$\hat{L}_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

(2 Punkte)

(d) Lösen Sie die Eigenwertgleichung

$$\hat{L}_z\Phi(\varphi) = \lambda\Phi(\varphi)$$

mit der Randbedingung $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$

(2 Punkte)

11. Welche Wirkung hat der Operator $e^{\frac{i}{\hbar}\alpha\hat{L}_z}$ auf eine Funktion $\psi(x, y, z)$?

(1 Punkt)