

**Übungen zur Theoretischen Physik III für Lehramtskandidaten
(Quantenmechanik+Statistische Physik)
SS 2010, Blatt 3**

5. Aufgabe: Harmonischer Oszillator (2+2+2 Punkte)

6. Aufgabe: Hermitsche Matrix (1+1+1 Punkte)

a)

Um die Eigenwerte von A zu finden müssen wir folgende Gleichung lösen

$$\det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 2i \\ -2i & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (1)$$

Damit ergibt sich die charakteristische Gleichung

$$\lambda(\lambda - 3) - 4 = 0 \quad (2)$$

was die Eigenwerte $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = -1$ ergibt.

b)

Für die zugehörigen Eigenvektoren gilt $A\vec{x}_{1,2} = \lambda_{1,2}\vec{x}_{1,2}$ und damit

$$3x_{1,2} + 2iy_{1,2} = \lambda_{1,2}x_{1,2} \quad (3)$$

$$-2ix_{1,2} = \lambda_{1,2}y_{1,2} \quad (4)$$

Wir wählen $x_{1,2} = i$ und finden von Gl. (4) $y_1 = \frac{1}{2}$ und $y_2 = -2$. Damit erhalten wir für die nicht normierten Eigenvektoren

$$\tilde{\vec{x}}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\tilde{\vec{x}}_2 = \begin{pmatrix} i \\ -2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Und durch Normieren erhält man

$$\vec{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} i \\ -2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

c)

Damit ergibt sich für die unitäre Transformation die A diagonalisiert

$$U = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2i & i \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

mit

$$U^\dagger A U = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) \quad (9)$$

7. Aufgabe: (1 Punkt)

Wenn sich das Teilchen im quantenmechanischen Grundzustand befindet so hat es die Energie $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$. Um den klasisch erlaubten Bereich zu bestimmen muessen wir die Umkehrpunkte des Teilchens bestimmen, wenn es die Energie E_0 hat. Die klassische Hamiltonfunktion ist gegeben durch $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = E_{kin} + E_{pot}$. An den klasischen Umkehrpunkten gilt $p = 0$ und daher

$$E_0 = E_{kin} \quad (10)$$

$$\frac{\hbar\omega}{2} = \frac{1}{2}m\omega^2x_0^2 \quad (11)$$

Damit finden wir für die klasischen Umkehrpunkte $x_c = \pm\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} = \pm x_0$ D.h. ein klasisches Teilchen wird sich nur im Bereich $[-x_0, x_0]$ aufhalten. Laut Vorlesung gilt für die Wahrscheinlichkeitsdichte eines Teilchens im Grundzustand des harmonischen Oszillators

$$|\psi(x)|^2 = \frac{1}{x_0\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{x_0^2}\right] \quad (12)$$

und damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit das Teilchens ausserhalb des Bereichs $[-x_0, x_0]$ zu finden $P(|x| > x_0) = 1 - P_c$ wobei P_c die Wahrscheinlichkeit ist, das Teilchen in $[-x_0, x_0]$ zu finden und damit

$$P(|x| > x_0) = 1 - \int_{-x_0}^{x_0} dx |\psi(x)|^2 = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 da e^{-a^2} = 1 - \text{erf}(1) \quad (13)$$

wobei wir die Symmetrie der Wellenfunktion benutzt haben, $a = x/x_0$ substituiert und $\text{erf}(x)$ die Errorfunktion ist. Numerische Berechnung ergibt

$$P(|x| > x_0) \approx 0.157 \quad (14)$$