Universität des Saarlandes
Fachrichtung 7.1 – Theoretische Physik
Prof. Dr. H. G. Schuster

Übungen zur Theoretischen Physik III für Lehramtskandidaten (Quantenmechanik+Statistische Physik)
SS 2010, Blatt 7

14. Aufgabe: Dichtematrix (3 Punkte)

a)
Die Dichtematrix eines Systems kann geschrieben werden als $\rho = \sum_n p_n |n\rangle\langle n|$, dabei sind die p_n die Wahrscheinlichkeiten, dass sich das System im Zustand $|n\rangle$ befindet. Daher können wir die Dichtematrix wie folgt schreiben

$$\rho = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

b)
Damit ergibt sich für den Mittelwert von σ_x

$$\langle \sigma_x \rangle = \mathrm{tr}\,\{\rho\sigma_x\} = \mathrm{tr}\,\{\sigma_x\} = 0 \tag{2}$$

c)
Jetzt ergibt sich für die Dichtematrix

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

und somit

$$\langle \sigma_x \rangle = \mathrm{tr}\,\{\rho\sigma_x\} = 1 \tag{4}$$

15. Aufgabe: Stirlingsche Formel (3 Punkte)

a)
Wir haben

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dx x^N e^{-x} &= \left[\frac{d^N}{da^N}(-1)^N \int_0^\infty dx e^{-ax}\right]_{a=1} \\ &= \left[\frac{d^N}{da^N}(-1)^N \frac{1}{a}\right]_{a=1} \\ &= N! \end{aligned} \tag{5}$$

a)
Wir haben

$$\begin{aligned} N! &= \int_0^\infty dx x^N e^{-x} \\ &= \int_0^\infty dx e^{N\ln x - x} \\ &= \int_0^\infty dx e^{Nf(x)} \end{aligned} \tag{6}$$

mit $f(x) = -\frac{x}{N} + \ln x$. Aus der Vorlesung wissen wir, das so ein Integral mit der Sattelpunktsnäherung berechnet werden kann wenn $N \gg 1$. Die erste und zweite Ableitung von $f(x)$ sind

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{N} + \frac{1}{x} \\ f''(x) &= -\frac{1}{x^2} < 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Es ist also $x_0 = N$ ein globales Maximum von $f(x)$ für $x \in [0, \infty]$. Damit ergibt sich mit der Sattelpunktsnäherung aus der Vorlesung

$$\begin{aligned} N! &= \sqrt{\frac{2\pi}{N|f''(x_0)|}} e^{Nf(x_0)} \\ &= \sqrt{2\pi N} e^{N(\ln N - 1)} \\ &= \sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N \end{aligned} \tag{8}$$

16. Aufgabe: Der versteckte Schatz (3 Punkte)

a)

Da die Wahrscheinlichkeiten gleich verteilt sind ist die Wahrscheinlichkeit den Schatz zu finden P_s

$$P_s = \frac{1}{N} \tag{9}$$

b)

Im folgenden gilt $P(A)$ ist die Wahrscheinlichkeit das ein Ereignis A eintritt, $P(A|B)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis A eintritt, unter der Voraussetzung, dass das Ereignis B eingetroffen ist und $P(A \cap B)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Ereignisse A und B beide eintreffen. Es gilt weiterhin

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{10}$$

Es gelte für die Ereignisse A, A_w und B:
A - ich gewinne ohne zu wechseln
A_w - ich gewinne mit wechseln
B - der Helfer deckt den Schatz nicht auf
$P(A|B)$ ist also die Wkt. zu gewinnen, wenn nicht gewechselt wird und $P(A_w|B)$ ist die Wkt. zu gewinnen, wenn gewechselt wird. Wir betrachten 2 Fälle

- Der Helfer weiss wo der Schatz versteckt ist:
  In diesem Fall gilt $P(B) = 1$ da der Helfer den Schatz nie aufdecken wird. Ausserdem gilt $P(A \cap B) = \frac{1}{N} * 1$ (Wkt. am Anfang richtig zu wählen mal Wkt. das Helfer den Schatz nicht aufdeckt) und somit $P(A|B) = \frac{1}{N}$.
  Andererseits gilt $P(A_w \cap B) = \frac{N-1}{N} * 1 * \frac{1}{N-2}$ (Wkt. am Anfang falsch zu liegen*Wkt. das Helfer den Schatz nicht aufdeckt*Wkt. danach richtig zu tippen). Und somit $P(A_w|B) = \frac{N-1}{N(N-2)} > P(A|B)$
  In diesem fall sollte man also wechseln.

- Der Helfer weiss nicht wo der Schatz versteckt ist:
  Hier gilt also $P(B) = \frac{N-1}{N}$. Ausserdem gilt $P(A \cap B) = \frac{1}{N} * 1$ (Wkt. am Anfang

richtig zu wählen mal Wkt. das Helfer den Schatz nicht aufdeckt (wenn ich richtig gewählt habe)). Somit ergibt sich also $P(A|B) = \frac{1}{N-1}$. Andererseits gilt $P(A_w \cap B) = \frac{N-1}{N} * \frac{N-2}{N-1} * \frac{1}{N-2} = \frac{1}{N}$ (Wkt. am Anfang falsch zu liegen*Wkt. das Helfer den Schatz nicht aufdeckt*Wkt. danach richtig zu tippen). Und somit $P(A_w|B) = \frac{1}{N-1}$
In diesem Fall ist es also egal ob man die Tür wechselt oder nicht.

Da wir in der Regel nicht wissen, ob der Helfer weiss wo der Schatz ist oder nicht, ist es in jedem Fall besser zu wechseln.