Universität des Saarlandes
Fachrichtung 7.1 – Theoretische Physik
Prof. Dr. H. G. Schuster

Saarbrücken, 21.05.2010

Übungen zur Theoretischen Physik III für Lehramtskandidaten (Quantenmechanik+Statistische Physik)
SS 2010, Blatt 5

Aufgabe 10: Drehimpuls

a) (1 Punkt) zu zeigen: $[\hat{L}_1, \hat{L}_2] = i\hbar\hat{L}_3$
Aus der klassischen Mechanik wissen wir, dass der Drehimpuls definiert ist als:

$$\underline{\hat{L}} = \underline{\hat{x}} \times \underline{\hat{p}} = \begin{pmatrix} \hat{x}_2\hat{p}_3 - \hat{x}_3\hat{p}_2 \\ \hat{x}_3\hat{p}_1 - \hat{x}_1\hat{p}_3 \\ \hat{x}_1\hat{p}_2 - \hat{x}_2\hat{p}_1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

wobei $\hat{x}_l, \hat{p}_l, \hat{L}_l$ mit $l = 1, 2, 3$ eine andere Schreibweise für die Komponenten der Vektoren $\underline{\hat{x}}, \underline{\hat{p}}, \underline{\hat{L}}$ ist.
Aus (1) folgt:

$$[\hat{L}_1, \hat{L}_2] = [(\hat{x}_2\hat{p}_3 - \hat{x}_3\hat{p}_2), (\hat{x}_3\hat{p}_1 - \hat{x}_1\hat{p}_3)] \tag{2}$$
$$= [\hat{x}_2\hat{p}_3, \hat{x}_3\hat{p}_1] - [\hat{x}_2\hat{p}_3, \hat{x}_1\hat{p}_3] - [\hat{x}_3\hat{p}_2, \hat{x}_3\hat{p}_1] + [\hat{x}_3\hat{p}_2, \hat{x}_1\hat{p}_3] \tag{3}$$

Dabei wurde im zweiten Schritt die Kommutator Algebra ausgenutzt.
Da $[\hat{x}_l, \hat{p}_{l'}] = i\hbar\delta_{ll'}$ gilt, verschwinden zudem die Kommutatoren $[\hat{x}_2\hat{p}_3, \hat{x}_1\hat{p}_3]$ und $[\hat{x}_3\hat{p}_2, \hat{x}_3\hat{p}_1]$.
Die zwei restlichen Kommutatoren können wie folgt umgeschrieben werden:

$$[\hat{x}_2\hat{p}_3, \hat{x}_3\hat{p}_1] + [\hat{x}_3\hat{p}_2, \hat{x}_1\hat{p}_3] \tag{4}$$
$$= \hat{x}_2[\hat{p}_3, \hat{x}_3]\hat{p}_1 + \hat{p}_2[x_3, \hat{p}_3]\hat{x}_1 = -i\hbar\hat{x}_2\hat{p}_1 + i\hbar\hat{p}_2\hat{x}_1 \tag{5}$$
$$= i\hbar(\hat{p}_2\hat{x}_1 - \hat{x}_2\hat{p}_1) = i\hbar\hat{L}_3 \tag{6}$$

b) (3 Punkte)
Mit der Transformation zwischen kartesischen und räumlichen Polarkoordinaten (Kugelkoordinaten), soll gezeigt werden, dass der Differentialoperator in Kugelkoordinaten geschrieben werden kann als:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \sin(\vartheta)\cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos(\vartheta)\cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial\vartheta} - \frac{1}{r}\frac{\sin(\varphi)}{\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{7}$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin(\vartheta)\sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos(\vartheta)\sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r}\frac{\cos(\varphi)}{\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{8}$$
$$\frac{\partial}{\partial z} = \cos(\vartheta)\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin(\vartheta)\frac{\partial}{\partial\vartheta} \tag{9}$$

Dazu verwenden wir:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial \vartheta} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{10}$$

was analog für $\frac{\partial}{\partial z}$ und $\frac{\partial}{\partial z}$ gilt. Unter Verwendung von Kugelkoordinaten gilt es also folgende Ableitungen auszurechnen:
für (7)

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r} = \cos(\varphi)\sin(\vartheta) \tag{11}$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)\right) = \frac{x}{z\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{1+\frac{x^2+y^2}{z^2}} = \frac{1}{r}\cos(\varphi)\cos(\vartheta) \tag{12}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{1}{r}\frac{\sin(\varphi)}{\sin(\vartheta)} \tag{13}$$

für (8)

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \sin(\varphi)\sin(\vartheta) \tag{14}$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \frac{1}{r}\cos(\vartheta)\sin(\varphi) \tag{15}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{r}\frac{\cos(\varphi)}{\sin(\vartheta)} \tag{16}$$

für (9)

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \cos(\vartheta) \tag{17}$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial z} = -\frac{1}{r}\sin(\vartheta) \tag{18}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \tag{19}$$

Einsetzen von (11),(12),(13) in (10) ergibt (7). Analog für $\frac{\partial}{\partial y}$ und $\frac{\partial}{\partial z}$

c) (2 Punkte) Zu zeigen, dass $\hat{L}_z$ in Kugelkoordinaten die From $\hat{L}_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \varphi}$ hat.
Dazu benutzen wir aus Aufgabenteil a):

$$\hat{L}_z = \hat{x}_1\hat{p}_2 - \hat{x}_2\hat{p}_1 \tag{20}$$

$$\text{Ortsdarstellung: } \hat{L}_z = \frac{\hbar}{i}x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\hbar}{i}x_2\frac{\partial}{\partial x_1} \tag{21}$$

wobei x_1, x_2 in Kugelkoordinaten gegeben sind als $x_1 = r\cos(\varphi)\sin(\vartheta)$ und $x_2 = r\sin(\varphi)\sin(\vartheta)$. Zudem wissen wir aus Aufgabenteil b), dass die Differentialoperatoren $\frac{\partial}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial}{\partial x_2}$ in Kugelkoordinanten geschrieben werden können als (7) und (8).

$$\frac{\hbar}{i}x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_1} \tag{22}$$

$$= \frac{\hbar}{i}r\cos(\varphi)\sin(\vartheta)\left(\sin(\vartheta)\sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos(\vartheta)\sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r}\frac{\cos(\varphi)}{\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \tag{23}$$

$$- \frac{\hbar}{i}r\sin(\varphi)\sin(\vartheta)\left(\sin(\vartheta)\cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos(\vartheta)\cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial\vartheta} - \frac{1}{r}\frac{\sin(\varphi)}{\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \tag{24}$$

$$= \frac{\hbar}{i}\left(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\right)\frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{25}$$

$$= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi} = \hat{L}_z \tag{26}$$

d) (2 Punkte) Es soll die folgende Eigenwertgleichung gelöst und die Eigenwerte λ bestimmt werden:

$$\hat{L}_z\phi(\varphi) = \lambda\phi(\varphi) \tag{27}$$

$$\text{mit (26)} \;\rightarrow\; \phi'(\varphi) - i\frac{\lambda}{\hbar}\phi(\varphi) = 0 \qquad \text{Dgl- 1.Ordnung} \tag{28}$$

$$\text{Lösung:}\;\; \phi(\varphi) = \phi(0)\; e^{i\frac{\lambda}{\hbar}\varphi} \tag{29}$$

Dabei können die Eigenwerte λ über die Randbedingung $\phi(\varphi + 2\pi) = \phi(\varphi)$ bestimmt werden

$$e^{i\frac{\lambda}{\hbar}(\varphi+2\pi)} = e^{i\frac{\lambda}{\hbar}\varphi} \tag{30}$$

$$\rightarrow\; e^{i\frac{\lambda}{\hbar}2\pi} = 1 \tag{31}$$

Gleichung (29) ist erfüllt, wenn für λ gilt:

$$\lambda = m\hbar, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{32}$$

Somit können die Eigenwerte des Impulsoperators in z-Richtung nur diskrete Werte annehmen. Sie sind also gequantelt. Dabei wird m auch magnetische Quantenzahl genannt.

$$\hat{L}_z\phi(\varphi) = m\hbar\phi(\varphi) \tag{33}$$

<u>Aufgabe 11</u>: (1 Punkt) Wirkung des Operators $e^{\frac{i}{\hbar}\alpha\hat{L}_z}$ auf eine Funktion $\psi(x, y, z)$.

Um die Wirkung des Operator zu bestimmen, verwenden wir Kugelkoordinaten

$$e^{\frac{i}{\hbar}\alpha\hat{L}_z}\psi(x, y, z) = e^{\alpha\frac{\partial}{\partial\varphi}}\psi(r, \vartheta, \varphi) \tag{34}$$

Mit dem Satz von Taylor $f(x + h) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}\right)^n f(x)$ ergibt sich für die Wirkung des Operators in Kugelkoordinaten:

$$e^{\alpha\frac{\partial}{\partial z}}\psi(r, \vartheta, \varphi) = \psi(r, \vartheta, \varphi + \alpha) \tag{35}$$

$$= \psi(x', y', z) \tag{36}$$

mit den neuen kartesischen Koordinaten:

$$x^{'} = r\cos(\varphi + \alpha)\sin(\vartheta) = r\sin(\vartheta)[\cos(\varphi)\cos(\alpha) - \sin(\varphi)\sin(\alpha)] \tag{37}$$

$$y^{'} = r\sin(\varphi + \alpha)\sin(\vartheta) = r\sin(\vartheta)[\sin(\varphi)\cos(\alpha) + \cos(\varphi)\sin(\alpha)] \tag{38}$$

Jetzt müssen noch nie neuen Koordinaten durch die Alten (x, y) ausgedrückt werden:

$$x^{'} = x\cos(\alpha) - y\sin(\alpha) \tag{39}$$

$$y^{'} = y\cos(\alpha) + x\sin(\alpha) \tag{40}$$

Damit ergibt sich für die Wirkung des Operator:

$$e^{\frac{\hbar}{i}\alpha\hat{L}_z}\psi(x, y, z) = \psi(x\cos(\alpha) - y\sin(\alpha), y\cos(\alpha) + x\sin(\alpha), z) \tag{41}$$

was einer Drehung im Raum um die z-Achse um dem Winkel α entspricht.