Universität des Saarlandes
Fachrichtung 7.1 – Theoretische Physik
Prof. Dr. H. G. Schuster

Saarbrücken, 07.07.2010

Musterlösung
(Theoretische Physik III Statistische Physik)
SS 2010, Blatt 9

Aufgabe 20 (2 Punkte)

Die Verteilung der Summenvariablen $P(y)$ ist gegeben als (Vorlesung 2.18):

$$P(y) = \prod_{j=1}^{N} \int dx_j \delta \left(y - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x_k \right) \prod_{l=1}^{N} p_l(x_l) \tag{1}$$

wobei nun jedes x_l die zugehŕige Wahrscheinlichkeitsverteilung $p_l(x_l)$ besitzt. Mit der Delta-Funktion $\delta(z) = \frac{1}{2\pi} \int d\psi e^{i\psi z}$ folgt:

$$P(y) = \frac{1}{2\pi} \int d\psi e^{i\psi y} \prod_{j=1}^{N} \int dx_j e^{\left(-i \frac{\psi}{N} \sum\limits_{k=1}^{N} x_k \right)} \prod_{l=1}^{N} p_l(x_l) \tag{2}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int d\psi e^{i\psi y} \prod_{i=1}^{N} \int dx_i e^{-i\frac{\psi}{N} x_i} p_i(x_i) \tag{3}$$

Nun gilt es als das Integral $I_i = \int dx_i e^{-i\frac{\psi}{N}x_i} p_i(x_i)$ zu berechenen. Da $N >> 1$ kann die Exponentialfunktion bis zur zweiten Ordnung entwickelt werden:

$$I_i \approx \int dx_i \left(1 - i\frac{\psi}{N} x_i - \frac{1}{2} \frac{\psi^2}{N^2} x_i^2 \right) p_i(x_i) \tag{4}$$

$$= \int dx_i p_i(x_i) - i \int dx_i \frac{\psi}{N} x_i p_i(x_i) - \frac{1}{2} \int dx_i \frac{\psi^2}{N^2} x_i^2 p_i(x_i) \tag{5}$$

$$= 1 - \underbrace{i\frac{\psi}{N} \langle x_i \rangle - \frac{1}{2} \frac{\psi^2}{N^2} \left\langle x_i^2 \right\rangle}_{<<1} \tag{6}$$

$$\approx e^{-\frac{\psi}{N} \langle x_i \rangle - \frac{1}{2} \frac{\psi^2}{N^2} \left\langle x_i^2 \right\rangle} \tag{7}$$

Somit ergibt sich für $P(y)$:

$$P(y) = \frac{1}{2\pi} \int d\psi e^{i\psi y} \prod_{i=1}^{N} I_i \tag{8}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int d\psi e^{i\psi (y - \frac{1}{N} \sum\limits_{i}^{N} \langle x_i \rangle) - \frac{\psi^2}{2N^2} \sum\limits_{i=1}^{N} \left\langle x_i^2 \right\rangle} \tag{9}$$

was ein Gaussintegral von der Form $\int dx e^{-bx^2+cx} = \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{\frac{c^2}{4b}}$ ist. Mit $\langle y \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \langle x_i \rangle$, $\langle y^2 \rangle = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N} \langle x_i^2 \rangle$ ergibt sich die Lösung zu:

$$P(y) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{\langle y^2 \rangle}} \exp\left[-\frac{(y - \langle y \rangle)^2}{2 \langle y^2 \rangle} \right] \tag{10}$$

Aufgabe 21 (5 Punkte)

Gegeben ist ein Sytem mit zwei Energieniveaus E_1 und E_2 mit $0 < E_1 < E_2$. Dabei befindet sich das System in einem Wärmebad der Temperatur T.

a) Berechnen Sie die Zustandssumme Z.

Die Zustandssumme kann im kanonischen Ensemble angegeben werden als:

$$Z = \sum_i e^{-\frac{E_i}{k_b T}} = e^{-\frac{E_1}{k_b T}} + e^{-\frac{E_2}{k_b} T} \tag{11}$$

$$= e^{-\beta E_1} + e^{-\beta E_2} \tag{12}$$

wobei die Summe über alle Zustände läuft, was in unserem Fall nur zwei sind.

b) Mittlere Energie und Entropie

Wie in der Vorlesung gezeigt wurde (3.38) gilt für die mittlere Energie $\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z$. Mit der berechneten Zustandssumme folgt:

$$\langle E \rangle = \frac{E_1 e^{-\beta E_1} + E_2 e^{-\beta E_2}}{e^{-\beta E_1} + e^{-\beta E_2}} \tag{13}$$

Die Entropie ist definiert als $S = -\frac{\partial A}{\partial T}\Big|_{N.V}$, wobei $A(T, V, N) = -k_B T \ln Z$ die freie Energie des Systems ist. Die Entropie kann also wie folgt berechnet werden:

$$S = \frac{\partial}{\partial T}(k_B T \ln Z), \qquad \text{wobei } Z = Z(T, V) \tag{14}$$

$$= k_B \ln Z + k_B T \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial T} \tag{15}$$

$$= k_B \ln Z + \frac{1}{T} \langle E \rangle \tag{16}$$

$$= k_B \ln\left(e^{-\beta E_1} + e^{-\beta E_2}\right) + \frac{1}{T} \frac{E_1 e^{-\beta E_1} + E_2 e^{-\beta E_2}}{e^{-\beta E_1} + e^{-\beta E_2}} \tag{17}$$

c) mittleres Schwankungsquadrat

Es gilt für das mittlere Schwankungsquadrat $\langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2$. Dabei ist $\langle E \rangle = \sum_i p_i E_i$ (3.26), mit $p_i = \frac{e^{-\beta E_i}}{Z}$. Somit ergibt sich für das mittlere Schwankungsquadrat:

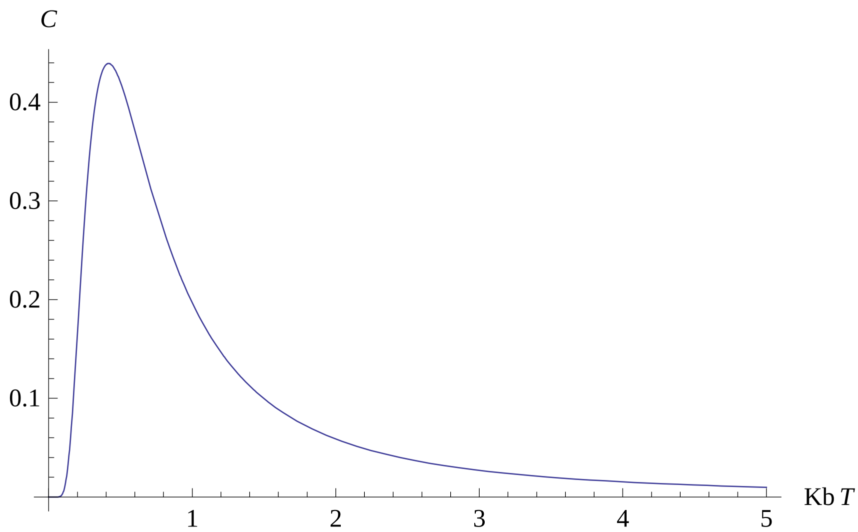
$$\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 = \frac{E_1^2 e^{-\beta E_1} + E_2^2 e^{-\beta E_2}}{Z} - \left(\frac{E_1 e^{-\beta E_1} + E_2 e^{-\beta E_2}}{Z} \right)^2 \tag{18}$$

d) Spezifische Wärme

Die spezifische Wärme C ist definiert als:

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{\partial}{\partial T}\langle E\rangle\,, \qquad \text{mit der mittleren Energie} \quad \langle E\rangle = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z && (19)\\
&= k_B\beta^2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\ln Z = k_B\beta^2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\ln Z = k_B\beta^2\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta}\right) && (20)\\
&= k_B\beta^2\left(\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial\beta} - \frac{1}{Z^2}\left(\frac{\partial Z}{\partial\beta}\right)^2\right) && (21)\\
&= k_B\beta^2\left(\left\langle E^2\right\rangle - \langle E\rangle^2\right) && (22)\\
&= k_B\beta^2\left(\frac{e^{-\beta E_1}}{e^{-\beta E_1}}\left(\frac{E_1^2+E_2^2e^{-\beta(E_2-E_1)}}{1+e^{-\beta(E_2-E_1)}}\right) - \left(\frac{e^{-\beta E_1}}{e^{-\beta E_1}}\frac{E_1+E_2e^{-\beta(E_2-E_1)}}{1+e^{\beta(E_2-E_1)}}\right)^2\right) && (23)\\
&\propto \left(\frac{1}{2k_BT}\operatorname{sech}\left(\frac{1}{2k_BT}\right)\right)^2 && (24)
\end{aligned}
$$

$$
C = \frac{\mathrm{Sech}\left[\frac{1}{2T}\right]^2}{4T^2}
$$



Aufgabe 22 (3 Punkte)

Wir haben N identische Zwei-Niveau-Systeme, wobei $N >> 1$, mit den Energieniveaus E_1 und E_2, mit $0 < E_1 < E_2$. Diese sind wiederum in ein Wärmebad eingelassen, welches die Temperatur T besitzt.
Zur Berechnung der kanonischen Zustandssumme müssen wir alle Möglichkeiten abzählen, die einzelnen N Systeme mit der Energie E_1 oder E_2 zu besetzen, versehen mit der entsprechenden Gewichtung (Wärmebad mit Temperatur T). Mit n bezeichnen wir die Anzahl der Systeme mit Energie E_1. Dann haben $N-n$ Systeme die Energie E_2. Somit

ergibt sich für die Zustandssumme:

$$Z = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} e^{-\beta E_n} \tag{25}$$

Dabei sind $\binom{N}{n}$ die Möglichkeiten, n Systeme aus N Systemen mit der Energie E_1 zu besetzen. (vgl. Lotto $\binom{49}{6}$)

Und $E_n = nE_1 + (N-n)E_2$ die Gesamtenergie (aller Systeme) mit der Gewichtung $e^{-\beta E_n}$.
Die Zustandssumme kann nun mit dem Binomialsatz umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} e^{-\beta E_n} = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} e^{-\beta n E_1} e^{-\beta(N-n)E_2} \\ \text{mit} &\sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} a^n b^{N-n} = (a+b)^N \\ &= \left(e^{-\beta E_1} + e^{-\beta E_2}\right)^N \end{aligned}$$

Um nun R zu berechen wird nun zuerst die mittlere Energie $\langle E \rangle$ berechnet:

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \tag{26}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \left(\left(e^{-\beta E_1} + e^{-\beta E_2}\right)^N \right) \tag{27}$$

$$= \underbrace{-N \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \left(\underbrace{e^{-\beta E_1} + e^{-\beta E_2}}_{Z_1\text{:Zustandssumme für ein System}} \right)}_{\langle E \rangle \text{ für ein System}} \tag{28}$$

$$= N \frac{E_1 e^{-\beta E_1} + E_2 e^{-\beta E_2}}{e^{-\beta E_1} + e^{-\beta E_2}} \tag{29}$$

Nun wird das mittlere Schwankungsquadrat berechnet:

$$\left\langle E^2 \right\rangle - \langle E \rangle^2 = \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \ln Z, \qquad \text{vgl.}(20), (22) \tag{30}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \ln(Z_1^N) = N \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \ln(Z_1) \tag{31}$$

$$= N \left(\frac{E_1^2 e^{-\beta E_1} + E_2^2 e^{-\beta E_2}}{Z_1} - \left(\frac{E_1 e^{-\beta E_1} + E_2 e^{-\beta E_2}}{Z_1} \right)^2 \right) \tag{32}$$

Damit ergibt sich für R

$$R = \frac{\sqrt{\langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle}}{\langle E \rangle} = \frac{\sqrt{N}}{N} R_{ein\ System} \tag{33}$$

$$\propto \frac{1}{\sqrt{N}} \qquad \text{vgl. mit Gesetz der grossen Zahlen} \tag{34}$$