Universität des Saarlandes
Fachrichtung 7.1 – Theoretische Physik
Prof. Dr. H. G. Schuster

Saarbrücken, 14.07.2010

Musterlösung
(Theoretische Physik III Statistische Physik)
SS 2010, Blatt 10

Aufgabe 23 (3 Punkte)

Zu jedem erlaubten $\vec{k}$-Wert gehört ein Volumen $(2\pi/L)^3$. Näherungsweise Berechnung der Zustände mit $\vec{k} < k$ indem man Kugelvolumen mit Radius k durch Zustandsvolumen dividiert: $z(k) = \frac{4}{3}\pi k^2/(2\pi/L)^3 = \frac{L^3}{6\pi^2}k^3$ (für 3-d Kasten mit Kantenlänge L). Nun ist $k = \omega/c$. Einsetzen und anschließend ableiten gemäß $\rho(\omega) = \frac{dz(\omega)}{d\omega}$ liefert $\rho(\omega) = \frac{L^3\omega^2}{2\pi^2 c^3}$.

Aufgabe 21 (5 Punkte)

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich das System im Zustand n befindet ist $P_n \propto \exp\left(-\frac{E_n}{k_B T}\right)$. Die Proportionalitätskonstante folgt aus der Normierung $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$:

$$P_n = \frac{\exp\left(-\frac{E_n}{k_B T}\right)}{\sum_{n=0}^{\infty}\exp\left(-\frac{E_n}{k_B T}\right)}.$$

Einsetzen des Energieausdrucks und Auswerten der geometrischen Reihe im Nenner liefert

$$P_n = e^{-\frac{\hbar}{k_B T}n}\left[1 - e^{-\frac{\hbar}{k_B T}}\right].$$

Die mittlere Energie ist $\langle E\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} E_n P_n$. Beim Auswerten dieses Ausdrucks hilft die Formel $\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = x\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$. Es folgt

$$\langle E\rangle = \hbar\omega\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}\right].$$

Aufgabe 22 (3 Punkte)

a) Umformen des gegebenen Ausdrucks für die großkanonische Zustandssumme gibt

$$Z = \sum_{n=0} \underbrace{\sum_{\vec{p}_1,\ldots,\vec{p}_n} \frac{1}{n!}\exp\left(-\beta\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{(\vec{p}_i)^2}{2m}\right)\right)}_{:=Z_n \text{ kanonische Zustandssumme}} e^{-\lambda_2 n}$$

Werte zunächst Z_n aus. Umschreiben der Summe in ein Integral, dabei aufs Einheitsvolumen des Phasenraums beziehen. Die Ortsintegration kann sofort ausgeführt werden, da Z_n nicht ortsabhangig ist. Das liefert einen Faktor L^{3n}. Insgesamt:

$$Z_n = \frac{1}{n! h^{3N}} L^{3n} \prod_{i=1}^{3n}\int_{-\infty}^{\infty} dp_i \exp\left(-\beta\frac{(p_i)^2}{2m}\right).$$

Hier wurde noch die Summe im Exponenten der e-Funktion in ein Produkt von e-Funktionen umgeschrieben. Die Impulsintegration ist nun gaußartig und kann ausgeführt werden. Man erhält

$$Z_n = \frac{1}{n!h^{3N}} L^{3n} \prod_{i=1}^{3n} \sqrt{\frac{2\pi m}{\beta}} = \frac{L^{3n}\sqrt{2\pi m k_B T}^n}{n!h^{3n}} = \frac{1}{n!}\left(\frac{L}{\lambda}\right)^{3n},$$

mit λ gegeben auf dem Aufgabenblatt.
Nun zur großkanonischen Zustandssumme:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n e^{-\lambda_2 n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{L}{\lambda}\right)^{3n} e^{-\lambda_2 n} = \exp\left(\frac{L^3}{\lambda^3} e^{-\lambda_2}\right).$$

b) Für die Teilchenzahl gilt: $N = -\frac{\partial}{\partial\lambda_2}\log Z = -\frac{\partial}{\partial\lambda_2}\left(\frac{L^3}{\lambda^3}e^{-\lambda_2}\right) = \frac{V}{\lambda^3}e^{-\lambda_2}$. Auflösen nach λ_2 gibt $\lambda_2 = \log\frac{V}{N\lambda^3}$. Benutze nun $\lambda_2 = -\beta\mu$. Damit folgt die geforderte Formel.